

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude,  
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 450. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,  
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,  
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN  
Heidelberg

F. MÖGLICH  
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

UNIVERSITY  
OF MICHIGAN

JAN 13 1955

PHYSICS  
LIBRARY

## Inhalt

	Seite
K. Artmann, Hamburg: Unter welchen Bedingungen ist der Amplitudenverlauf einer seitlich begrenzten Welle komplex? .....	1
S. Parthasarathy and V. Narasimhan, New Delhi: Effect of Acoustic Impedance and Viscosity of Gases on the Electrical Constants of Quartz. With 6 Figures .....	6
E. Schnürer, Berlin-Buch: Absorptions- und Leitfähigkeitsmessungen an CdS im weichen Röntgengebiet. Mit 6 Abbildungen .....	15
H. Jahrreiß, Köln: Zur Berechnung von Elektroneninterferenzen an Zwillingskristallen. Mit 4 Abbildungen .....	21
W. Andrä, Jena: Magnetische Pulvermuster auf Martensit. Mit 8 Abbildungen	31
E. Bodenstedt, Bonn: Über die Phasenschwingungen beim Synchrotron mit starker Fokussierung. Mit 17 Abbildungen .....	35
K. W. Böer, Berlin: Berichtigung zur Arbeit: „Einige Bemerkungen zur Gisolfschen Theorie der Elektronenschwankungserscheinungen von Halbleitern“.	55

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Möglich, (1) Berlin-Buch, Lindenberg Weg 74, oder an Herrn Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Soeben erschien:

W. M. Guertler

### Metallkunde

Eine Vorlesung zur Einführung

I. Die freien Metalle

VIII, 204 S. mit 120 Textabbildungen und  
45 Bildern auf Tafeln. 1954. Geb. DM 19.60

GEBRÜDER BORNTAEGER, BERLIN-NIKOLASSE

# ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE \* BAND 15, HEFT 1 \* 1954

## Unter welchen Bedingungen ist der Amplitudenverlauf einer seitlich begrenzten Welle komplex?

Von Kurt Artmann

### Inhaltsübersicht

Die spezielle Form des von 0 auf 1 ansteigenden Amplitudenverlaufs  $A(l, b)$  einer seitlich begrenzten (Licht-)Welle  $A(l, b) e^{ikl}$  kann in allen praktischen Fällen nicht willkürlich (reell) vorgegeben werden, sondern muß in Gestalt des (wesentlich komplexen) Fresnelschen Integrales dargestellt werden.

Bezeichne  $l$  bzw.  $b$  die Koordinate in bzw. senkrecht zur Fortschreitungsrichtung der Welle, so wird in vielen Untersuchungen die Wellengleichung  $\partial^2 \psi / \partial l^2 + \partial^2 \psi / \partial b^2 + k^2 \psi = 0$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ) durch den Ansatz

$$\psi = A(l, b) e^{ikl} \quad (1)$$

gelöst. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> zeigte der Verfasser, daß die Wellengleichung für alle  $l, b$  nur dann durch eine reelle Amplitudenfunktion  $A(l, b)$  befriedigt werden kann, wenn  $A = \text{const. } b + \text{const.}$  Aus diesem Grunde hatte der Verfasser damals Einwände gegen eine Arbeit von Cl. Schaefer, Pich<sup>2)</sup> sowie v. Fragstein, Schaefer<sup>3)</sup> erhoben, in denen mit einem reellen  $A(l, b)$  operiert wurde.

Diese Einwände sehen v. Fragstein und Schaefer<sup>4)</sup> als ungerechtfertigt an und erheben außerdem Vorwürfe gegen die Richtigkeit von zwei Arbeiten des Verfassers. Diese Gegenargumente — soweit sie nicht Prioritätsansprüche darstellen — fußen auf folgenden beiden mathematischen Behauptungen, von denen die eine ( $A$ ) sicher unrichtig ist. Die zweite Behauptung ( $B$ ) ist zwar wörtlich genommen richtig. Aber ihre Formulierung ist so gewählt, daß sie das Gegenteil von dem ausdrückt, was wirklich stets in der Praxis vorliegt (nämlich komplexes  $A$ ).

A. Die Superposition zweier ebener Wellen mit gleicher Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$  aber etwas verschiedenen Fortschreitungsrichtungen läßt sich in Strenge darstellen in der Form

$$\psi = e^{ikl} \cdot F(b) \quad (2)$$

<sup>1)</sup> K. Artmann, Ann. Physik (6) 8, 285 (1951); im folgenden als I zitiert.

<sup>2)</sup> Cl. Schaefer u. R. Pich, Ann. Physik (5) 30, 245 (1937); im folgenden als II zitiert.

<sup>3)</sup> Cl. Schaefer u. C. v. Fragstein, Ann. Physik (6) 6, 39 (1949); im folgenden als III zitiert.

<sup>4)</sup> C. v. Fragstein u. Cl. Schaefer, Ann. Physik (6) 12, 84 (1953), im folgenden als IV zitiert.

mit reellem  $F(b)$ . (IV, S. 87 oben). Hierin bedeutet  $l$  die Koordinate in Richtung der Winkelhalbierenden der beiden ursprünglichen Wellen;  $b$  ist die Koordinate senkrecht hierzu.

B. Unter der Voraussetzung

$$\left| \frac{d^2 A}{d(b/\lambda)^2} \right| < \left| \frac{dA}{d(b/\lambda)} \right| < |A| \quad (3)$$

läßt sich die Wellengleichung näherungsweise durch reelles  $A(l, b)$  erfüllen (IV, S. 85 unten).

Zu A. Die Superposition zweier ebener Wellen mit den Fortschreitungsrichtungen  $\varphi \pm \Delta/2$ :

$$\psi = e^{ik[x \sin(\varphi - \Delta/2) - z \cos(\varphi - \Delta/2)]} + e^{ik[x \sin(\varphi + \Delta/2) - z \cos(\varphi + \Delta/2)]}$$

ergibt nach Einführung der Abkürzungen

$$l = x \sin \varphi - z \cos \varphi, \quad b = x \cos \varphi + z \sin \varphi$$

nach elementarer Zwischenrechnung ohne irgendwelche Streichungen

$$\psi = F(l, b) e^{ikl}; \quad F(l, b) = 2 \cdot \cos\left(kb \sin \frac{\Delta}{2}\right) e^{ikl\left(\cos \frac{\Delta}{2} - 1\right)}. \quad (4)$$

Wegen der Exponentialfunktion ist  $F$  nicht reell, also die Behauptung A widerlegt.

Entwickelt man bei kleinem  $\Delta$  den  $\cos \Delta/2$  der Exponentialfunktion von (4), so nimmt diese die Form  $e^{-ikl\Delta^2/8}$  an. In IV wird die Exponentialfunktion wegen  $\Delta \ll 1$  von v. Fragstein und Schaefer durch den Wert 1 ersetzt, wodurch dann  $F$  reell ausfällt. Hierbei ist nicht beachtet, daß diese Vereinfachung nur innerhalb eines Gebietes der Lineardimension  $l \ll 8\pi/(k\Delta^2)$  erlaubt ist. Da der Verfasser im § 2 von V<sup>5)</sup> zwei ebene Wellen superponierte, welche den gesamten Raum durchziehen ( $-\infty < l < +\infty$ ), so ändert sich die Phase von  $F(l, b)$  wesentlich im gesamten Raume. Meinen damaligen Betrachtungen lag also ein komplexer Verlauf  $F(l, b) [\equiv A(l, b)]$  zugrunde. Damit entfallen die in IV, S. 87, I. Abschnitt, gemachten Vorwürfe gegen die Richtigkeit meiner Betrachtungen in V.

Da die Phase von  $F$  nur von der Längskoordinate  $l$  abhängt, und außerdem innerhalb hinreichend kleiner Raumgebiete praktisch konstant ist, so braucht diese Phasenveränderlichkeit bei den meisten Betrachtungen nicht mitberücksichtigt zu werden. Da aber die v. Fragstein-Schaefer'schen Einwände gegen die Richtigkeit meiner früheren Überlegungen allein auf dem (falschen) Argument aufgebaut sind, daß  $F$  in aller Strenge reell sei, so muß bei der vorliegenden Entgegnung ausdrücklich auf diese Phasenveränderlichkeit hingewiesen werden.

Hinzu kommt, daß die auf der Superposition von nur zwei ebenen Wellen basierende elementare Theorie im § 2 von V nur dazu dienen sollte, auf denkbar kürzestem Wege den Wert für die Strahlversetzung beim Versuch von Goos und Hänchen<sup>6)</sup> verständlich zu machen. Meine strenge Theorie (Teil II von V), bei welcher unendlich viele ebene Wellen superponiert wurden, operierte mit dem Fresnelschen Integral als Amplitudenfunktion

<sup>5)</sup> K. Artmann, Ann. Physik (6) 2, 87 (1948); im folgenden als V zitiert.

<sup>6)</sup> F. Goos, H. Hänchen, Ann. Physik (6) 1, 333 (1947).



$A(l, b)$ , die wesentlich komplex ist (vgl. die folgende Anm. 7). Leider erwähnten v. Fragstein und Schaefer in IV, S. 87 oben, diesen Umstand nicht.

Zu B. Dem Ansatz (1) entspricht es, sich auf Amplitudenverläufe  $A(l, b)$  zu beschränken, die langsam auf der Strecke einer Wellenlänge veränderlich sind, d. h.

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial l^2} \right| \ll k \cdot \left| \frac{\partial A}{\partial l} \right| \quad (5) \qquad \left| \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} \right| \ll k \cdot \left| \frac{\partial A}{\partial b} \right|. \quad (5')$$

Den schnell oszillierenden Teil von  $\psi$  denkt man sich mit in den Faktor  $e^{ikl}$  in (1) aufgenommen. Da  $\psi$  der Wellengleichung genügt, so befriedigt  $A$  die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial l} = 0. \quad (6)$$

Wegen (5) kann der erste Term in (6) gegen den dritten gestrichen werden, so daß

$$\frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial l} = 0. \quad (7)$$

Bezeichnet  $A(0, b)$  den vorgegebenen Wert in einer Anfangsebene  $l = 0$ , so läßt sich die Lösung von (7) bekanntlich darstellen in der Form

$$A(l, b) = e^{-i\pi/4} \cdot \sqrt{\frac{k}{2\pi l}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, b') e^{i \frac{(b-b')^2 k}{2l}} \cdot db'. \quad (8)$$

Im Spezialfall, daß  $A(0, b')$  der Dirichletfaktor  $A(0, b') = 1$  für  $b' > 0$ ,  $A(0, b') = 0$  für  $b' < 0$ , ist (8) ersichtlich identisch mit dem Fresnelschen Integral

$$A(l, b) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\xi} e^{i\xi'^2} d\xi'; \quad \xi = \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{2l}}. \quad (9)$$

Praktisch ist  $A(l, b)$  immer dann gleich dem Fresnelschen Integral (9), wenn  $A(0, b')$  rasch ansteigt innerhalb des Gebietes  $(b - b')^2 k / (2l) \lesssim \pi/8$ , innerhalb dessen der 2. Faktor in (8) sich nur wenig ändert. Bezeichnet  $b_0$  den Bereich des wesentlichen Anstiegs der Amplitudenfunktion  $A(0, b)$  in der Anfangsebene  $l = 0$ , so ist die Amplitudenfunktion  $A(l, b)$  im Abstände

$$l \gtrsim \frac{4}{\pi} b_0^2 \cdot k \approx b_0^2 \cdot k \quad (10)$$

von der Anfangsebene praktisch immer gleich dem Fresnelschen Integral unabhängig von der speziellen Form des Amplitudenanstiegs  $A(0, b)$  auf der Anfangsebene  $l = 0$ . Da das Fresnelsche Integral wesentlich komplex<sup>7)</sup> ist, so ist auch  $A(l, b)$  wesentlich komplex, sofern (10) erfüllt ist.

<sup>7)</sup> Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die im Bereich  $|\xi| \lesssim 0,7$  (d. h. in Nähe der geometrischen optischen Schattengrenze) gültige Näherungsdarstellung von (9) benutzt:  $A \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} \cdot \xi$ .

Da die Amplitude  $A(l, b)$  hiernach nach Durchlaufen der letzten Blende immer bestrebt ist, die Form eines Fresnelschen Integrales anzunehmen, so ist bei einer Versuchsanordnung vom Typ Goos-Hänchen, bei welcher der Strahl nach Durchlaufen der letzten Blende wegen der vielen Zickzack-reflexionen einen langen optischen Weg  $l$  zurücklegt, die Bedingung (10) immer erfüllt, also  $A(l, b)$  gleich dem komplexen Fresnelschen Integral. Mit dem Werte (9) geht die v. Fragstein-Schaefer'sche Voraussetzung (3) im allein interessierenden Bereich  $|\xi| \lesssim 0,7$  über in die Forderung  $kl \gg 1$ , die sicherlich erfüllt ist. Damit ist die Behauptung B widerlegt; und somit entfallen die in IV, S. 86, 2. Absatz, gegen mich vorgebrachten Vorwürfe.

Um die v. Fragstein-Schaefer'sche Voraussetzung zu erfüllen, daß  $A(l, b)$  auf der Plattenebene reell ist, müßte durch passende Versuchsanordnung erreicht sein, daß nach Durchlaufen der letzten Blende die Amplitudenfunktion  $A(0, b)$  in der Anfangsebene  $l = 0$  (praktisch) rein reell ist mit einem Anstiegsbereich  $b_0 \gtrsim \sqrt{l/k}$  ( $l$  ist der optische Weg zwischen der Anfangsebene und der Aufnahmeplatte). Beim Versuch von Goos-Hänchen war  $l \approx 10$  cm. Mit  $k = 10^5 \text{ cm}^{-1}$  müßte  $b_0 \gtrsim 10^{-2}$  cm sein. Bedenkt man, daß im Abstände einiger weniger Wellenlängen hinter jeder metallischen einbackigen Blende schon ein (komplexer) Fresnel-Verlauf  $A(l, b)$  vorliegt, so dürfte es nur unter völlig anomalen Versuchsbedingungen möglich sein, auf der Aufnahmeplatte einen reellen Amplitudenverlauf  $A(l, b)$  herzustellen, der von 0 auf 1 ansteigt. Außerdem wirkt der soeben errechnete große Wert von  $b_0$  der Forderung entgegen, daß die Flankensteilheit von  $A$  möglichst klein sein muß, um den eigentlichen Effekt der Strahlversetzung möglichst genau auszumessen.

Die Diskrepanzen, die in IV zwischen meinen Ergebnissen und denen von Wolter<sup>8)</sup> aufgezeigt wurden, beruhen auf dem Umstande, daß ich gemäß dem in II und III aufgestellten Programm einen Amplitudenverlauf  $A(l, b)$  behandelte, der von 0 auf 1 ansteigt, während bei der Wolterschen Versuchsanordnung der unter A diskutierte Amplitudenverlauf (4) zugrunde lag, der den gesamten Raum durchzieht. Da  $A(l, b)$  im ersten Fall wesentlich, im zweiten Fall nur unwesentlich komplex ist, so ist es offenkundig, daß man bei einer Diskussion der Realitätsverhältnisse von  $A(l, b)$  die Woltersche Versuchsanordnung nicht ohne weiteres mit der von Goos-Hänchen vergleichen darf, wie es in IV geschieht.

Es bleibt somit das Ergebnis bestehen, daß von den bisher praktisch durchgerechneten Fällen in der Schaefer-Pichschen Theorie nur bei der Wolterschen Versuchsanordnung mit reellem  $A(l, b)$  operiert werden darf. Diese Tatsache schränkt den Wert der Schaefer-Pich-v.-Fragsteinschen Theorie insofern erheblich ein, als sich der Woltersche Fall, bei dem gemäß A nur zwei ebene Wellen superponiert werden, in fast trivial kurzer Weise durchrechnen läßt, was bei Schaefer-Pich sicher nicht der Fall ist. Der Sinn der Rechnungen von II und II kann doch nur darin bestehen, auf Probleme angewendet zu werden, bei denen nicht zwei, sondern unendlich viele ebene Wellen superponiert werden müssen, wie es bei dem in II und III aufgezeichneten Amplitudenverlauf A der Fall ist.

<sup>8)</sup> H. Wolter, Z. Naturforschg. 5a, 143 (1950).

Nach dem Vorangegangenen ist es dann aber nicht — wie v. Fragstein und Schaefer meinen — möglich, allein durch vereinfachte Annahmen über den Amplitudenverlauf  $A(l, b)$  die „Beugung zu eliminieren“ (IV, S. 87 unten), wenn die Rechnungen auf Experimente mit einer seitlich begrenzten Welle angewendet werden sollen. Auf die Schrödingersche Wellenmechanik übertragen, würde diese „Elimination der Beugung“ darauf hinauskommen, das Zerlaufen eines Wellenpaketes im Laufe der Zeit völlig zu ignorieren. Denn die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung, eines in einer ( $b$ -)Richtung beweglichen Wellenpakets, ist mit (7) identisch, sofern in (7) die Längskordinate  $l$  durch  $\hbar k t / m$  ersetzt wird ( $m$  = Teilchenmasse,  $\hbar$  = Plancksche Konstante). Bei einer üblichen (optischen) Versuchsanordnung, bei welcher  $A(l, b)$  praktisch gleich dem Fresnelschen Integral ist, bedeutet eine solche von Schaefer-Pich-v.-Fragstein vorgenommene „Elimination der Beugung durch Annahme eines reellen Amplitudenverlaufs  $A(l, b)$ “ nichts weiter als einen wesentlichen Verstoß gegen die Wellengleichung mit den von mir in I aufgezeigten Konsequenzen, die ich nach wie vor aufrechterhalte.

Hamburg, Institut für Theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 1. März 1954.

# Effect of Acoustic Impedance and Viscosity of Gases on the Electrical Constants of Quartz

By S. Parthasarathy and V. Narasimhan

With 6 Figures

## Abstract

The equivalent resistance, capacitance and the  $Q$  factor of a quartz crystal vibrating at its fundamental frequency in several gaseous media were measured and the results compared with the acoustic impedance ( $P C$ ) of the media. While the resistance varies linearly with  $P C$  the reciprocal capacitance does not. The  $Q$  factor seems to vary linearly with viscosity within the small range of viscosities.

## 1. Introduction

The electrical equivalent circuit of the piezo-electric transducer has been worked out by Cady<sup>1</sup>, Van Dyke<sup>2</sup> and Dye<sup>3</sup>. It has been shown that the quartz element can be assumed to be made up of a resistance, an inductance and a capacity all in series. Hubbard<sup>4</sup> generalised the theory of the equivalent network and deduced the conditions under which one could estimate the reflection and attenuation coefficients when the quartz element was vibrating in a medium. Fox<sup>5</sup> has applied Hubbard's theory for the calculation of absorption coefficients of ultrasound in water. Cady<sup>1</sup> has shown that

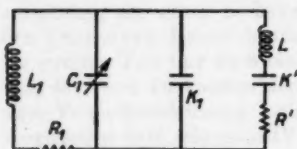


Fig. 1

when the quartz crystal vibrates in one of its resonant frequencies, the current passing through it drops considerably and under ideal conditions may reach even near zero values.

Hubbard considers the effect of the coupled fluid column on the electrical equivalents of the piezo crystal. He has shown that the coupled fluid column modifies the equivalent resistance and the piezoelectric capacity of the equivalent circuit of the quartz resonator. Referring to fig. 1, Hubbard obtains the expression

$$\sigma^2 = \frac{\Phi_1^2 \left[ \Phi_2^2 + \left( q + \frac{K'}{C_1 + K_1} \right)^2 \right]}{\left[ p q - q_1 q_2 - \frac{(1-p)K'}{C_1 + K_1} \right]^2 + \left[ \Phi_2 p + \Phi_1 \left( q + \frac{K'}{C_1 + K_1} \right) \right]^2}, \quad (1)$$

<sup>1</sup>) W. G. Cady, Proc. Inst. Radio Engineers **10**, 83 (1922).

<sup>2</sup>) K. S. van Dyke, Proc. Inst. Radio Engineers **16**, 742 (1928).

<sup>3</sup>) D. W. Dye, Proc. phys. Soc. London **38**, 39 (1926).

<sup>4</sup>) J. C. Hubbard, Physic. Rev. **33**, 1011 (1931); **41**, 523 (1932); **46**, 525 (1934).

<sup>5</sup>) F. E. Fox, Physic. Rev. **52**, 973 (1937).

where  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_1$  are the inductance, capacity and resistance of the pick up electrical resonant circuit  $K_1$ ,  $K'$ ,  $R'$  and  $L$  are the corresponding equivalent electrical constants of the quartz resonator with the coupled fluid column  $K_1$  being the dielectric capacity of the resonator and  $K'$  the modified piezo-electric capacity and

$$P = 1 - (c_1 + k_1) L_1 \omega^2$$

$$q = I - L K' \omega^2$$

$$\Phi_1 = R_1 (C_1 + K_1) \omega$$

$$\Phi_2 = R' K' \omega$$

$$\sigma = i/I_0$$

and  $i$  is the current in the  $L_1 R_1$  branch.  $I_0 = \frac{E_0}{R_1}$  is the maximum current in the resonant circuit when the crystal is disconnected  $E_0$  being the maximum voltage induced in  $L_1$ ,  $R'$  and  $K'$  include the modifications produced by the fluid column and

$$R' = R + A B P C S \quad (2)$$

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} + A B P C T, \quad (3)$$

where  $R$  is the equivalent resistance of the piezo crystal near its response frequency,  $K$  its piezo-electric capacity,  $A$  the effective area of the crystal exposed to the fluid column,  $B$  a piezo-electric coefficient,  $P$  the density of the fluid,  $C$  the velocity of sound in it and  $\omega$  is  $2\pi$  times the frequency of the voltage impressed in the coil.

$S$  and  $T$  are further defined so as to include terms involving the attenuation factor of the particle velocity in the fluid, the coefficient of reflection at the distant boundary and the length of the fluid column (Hubbard). When the sound wave is absorbed by the distant boundary the terms  $S$  and  $T$  become each equal to unity and equations (2) and (3) reduce to the simple form

$$R' = R + A B P C \quad (4)$$

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} + A B P C. \quad (5)$$

Equations (4) and (5) are of special interest, since the equivalent resistance and reciprocal capacitance of a piezo crystal vibrating in different media should vary directly with the acoustic impedance  $PC$  of the medium and so the following experiments were undertaken to verify how far these relations could be assumed to represent conditions actually obtaining when a piezo crystal vibrates in several gaseous media of varying  $PC$ .

## 2. Experimental

Several preliminary investigations were conducted to obtain a good crevasse but the one which was eventually successful will be described.

A Marconi TF 144 G type signal generator excited the crystal in its fundamental frequency. This signal generator has been claimed by its makers to be of substandard accuracy. The signal from this generator was fed into a General Radio unit amplifier. The output of this amplifier was fed to the coupling coil  $L$ , such that the amplifier delivered power into the loosely coupled  $L, C$ , circuit tuned to the crystal frequency, fig. 2. This method is the one generally adopted for all ultrasonic interferometry.  $L$ , is a coil of low inductance and was a standard  $25 \mu\text{H}$  coil supplied by Marconi's. The vacuum tube voltmeter capable of measuring voltages as low as 15 millivolts was used to measure the voltages across the crystal. The readings of this instrument were compared with those of the standard voltmeters available

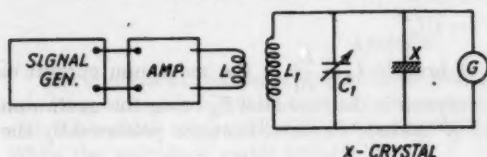


Fig. 2

in this laboratory. For the measurement of extremely low voltages that occur at the bottom of a crevasse, a sensitive shunted galvanometer was connected across the microammeter of the vacuum tube voltmeter through a changeover commutator and readings could be taken either on the voltmeter or galvanometer at will.

It was the aim of the experiment to oscillate the quartz crystal in several gaseous media and arrangements were made to evacuate and fill the gas container. The set up is described in fig. (3). These gases were dried and freed from carbon dioxide before letting into the chamber. The pressure was read on a barometer incorporated in the system and the temperature was

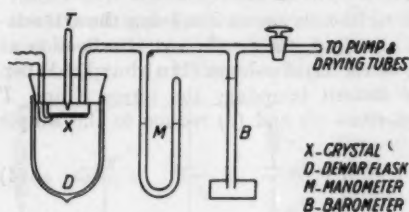


Fig. 3

measured by a thermometer with its bulb close to the quartz crystal. Of the several X-cut quartz crystals available here, one showed an excellent crevasse. It is well-known that X-cut crystals always have one or two secondary dips associated with them and the one which has a dip on one side of the principal dip had to be chosen. This crystal was silvered uniformly on both sides and washed with several organic solvents before mounting in its holder. The crystal was placed in a dewar flask and the dewar sealed in position in the vacuum system.

Since the  $LC$  circuit across the crystal was a very small value of inductance it is reasonable to assume that the value of the voltage induced in it by the signal generator would remain constant for the frequency width corresponding to the crevasse and experiments confirmed this within  $1/2$  percent.

The experiment consists of tuning the  $LC$  circuit to the crystal frequency and adjusting the input voltage to a constant value for each of the gases studied. A heterodyne frequency meter indicates the frequency of the input



signal and the potential across the crystal is read off the galvanometer scale. An excellent slow motion drive connected to the main tuning shaft of the signal generator made it possible to change the input frequency very gradually.

The procedure adopted in those measurements was the one suggested by Dye. A complete determination of the shape of the crevasse was made from observations of the voltage across the crystal at various frequencies on either side of the resonance frequency.

The crystal used in this experiment had a natural fundamental frequency of 414,216 kc/sec., where a very prominent crevasse was present and a smaller crevasse at a frequency about 200 cycles off. Calculations were made on the principal dip.

The main factors contributing to errors were calculated to be of the order of  $\pm 2.5\%$ . This included fluctuations of the voltmeter, slight creep in galvanometer and small changes in wave meter frequency, during the course of the experiments due mainly to variations in temperature.

The gases studied here are air, hydrogen, helium, nitrogen, oxygen, argon, nitrous oxide and carbon dioxide. All gases with the exception of helium were obtained from cylinders and their purity was rated as 99% or better, while the helium was obtained from this laboratory was 99.99% pure.

### 3. Results

A typical crevasse for argon is shown in fig. 4 and the values of voltmeter and wavemeter readings for all the gases studied are collected in Table I. These readings are the mean of several sets of observations taken on different days, special precautions being taken to note the minimum value of voltage, at the bottom of the crevasse. A fluctuation of 2 mm on the galvanometer scale at the bottom of the crevasse represents a change of 0.05 volts only across the crystal. In all these experiments, the fluctuation of galvanometer deflection at the bottom of the crevasse was less than 3 mm constituting an error which was negligible.

The calculations of the equivalent resistance, capacitance and  $Q$ , the quality factor of the crystal were based on the method suggested by Watanabe<sup>6</sup>). From the values of  $E$ , the voltage across the crystal at several frequencies on either side of the crevasse, one can plot the inverted resonance curve and hence, calculate all the electrical constants of the crystal including its quality factor  $Q$ .

The calculated values of  $R'$  and  $K'$  together with other relevant physical properties of the gases studied are collected in Table II.

<sup>6</sup>) Y. Watanabe, Proc. I. R. E. 18, 695 (1930).

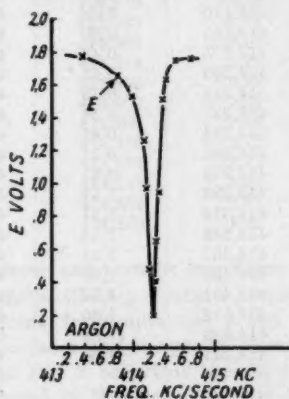


Fig. 4



The shape of the crevasse obtained in these investigations coincides with that of Dye. It is seen that the gradient of the voltage across the crystal is gradual on the low frequency- side and steep on the high frequency side. The frequency width of the crevasse is about one kilocycle while Hubbard's<sup>7)</sup> observations show a very sharp crevasse. Readjustments of the *LC* circuit did not produce any appreciable changes in either the shape or frequency width of the crevasse.

#### 4. Discussion

In ultrasonic interferometry, the shape and peak structure of the crevasse is utilised for the determination of sound velocity, absorption and reflection coefficients. In these experiments the effect of the medium on the shape and equivalent electrical constants of the crystal itself was studied. It is found that the medium in which the crystal vibrates does not alter the shape of the crevasse.

Table I

Vacuum (Temp. 24,2° C)		Air (Temp. 24,2° C)		Hydrogen (Temp. 24,0° C)	
Freq. kc/sec	E volts	Freq. kc/sec	E volts	Freq. kc/sec	E volts
413,370	1,81	413,370	1,81	413,370	1,77
413,650	1,82	413,425	1,82	413,442	1,79
413,865	1,45	413,550	1,83	413,532	1,80
413,915	1,62	413,618	1,835	413,690	1,80
414,012	1,68	413,732	1,81	413,854	1,72
414,055	1,53	413,794	1,78	413,914	0,76
414,110	1,22	413,854	1,64	413,956	1,71
414,155	0,80	413,907	0,91	414,012	1,69
414,175	0,43	413,920	1,54	414,048	1,62
414,205	0,13	413,970	1,73	414,090	1,48
414,215	0,13	414,000	1,69	414,115	1,36
414,221	0,34	414,036	1,64	414,145	1,14
414,234	0,41	414,072	1,53	414,163	0,91
414,252	0,71	414,108	1,40	414,180	0,71
414,275	0,91	414,146	1,15	414,200	0,39
414,293	1,17	414,187	0,715	414,210	—
414,318	1,34	414,204	0,28	414,216	0,145
414,342	1,53	414,216	0,167	414,240	—
414,367	1,61	414,240	0,33	414,253	0,33
414,400	1,69	414,264	0,79	414,265	0,69
414,451	1,77	414,300	1,03	414,277	0,86
414,518	1,80	414,318	1,28	414,307	1,07
414,620	1,82	414,336	1,42	414,330	1,30
414,747	1,80	414,355	1,61	414,373	1,53
		414,385	1,59	414,415	1,65
		414,415	1,69	414,433	1,69
		414,480	1,76	414,480	1,75
		414,560	1,81	414,520	1,78
		414,783	1,79	414,580	1,79
				414,607	1,80
				414,790	1,76

<sup>7)</sup> J. C. Hubbard, *Physic. Rev.* **41**, 523 (1932).

Table I contd.

Carbon Dioxide Temp.: 24.2° C		Oxygen Temp. 24.2° C		Helium Temp. 24.0° C	
Freq. kc/sec	E volts	Freq. kc/sec	E volts	Freq. kc/sec	E volts
413,370	1.77	413,370	1.79	413,370	1.80
413,430	1.78	413,491	1.82	413,430	1.82
413,503	1.79	413,673	1.81	413,476	1.83
413,618	1.80	414,794	1.78	413,491	1.83
413,645	1.78	414,896	1.42	413,510	1.83
413,835	1.69	414,934	1.72	413,562	1.84
413,907	1.07	414,012	1.66	413,612	1.84
413,975	1.69	414,055	1.47	413,721	1.83
414,030	1.66	414,096	1.24	413,769	1.81
414,078	1.53	414,120	1.03	413,890	1.07
414,102	1.43	414,150	0.66	413,908	0.97
414,127	1.26	414,174	0.40	413,932	1.66
414,156	1.07	414,187	—	413,958	1.76
414,169	0.86	414,216	0.17	413,981	1.74
414,200	0.49	414,222	—	414,025	1.69
414,210	0.36	414,246	1.49	414,054	1.63
414,216	0.18	414,270	0.86	414,072	1.57
414,222	0.24	414,294	1.19	414,102	1.43
414,234	0.30	414,312	1.32	414,127	1.26
414,258	0.47	414,342	1.49	414,145	1.10
414,277	0.71	414,373	1.57	414,156	0.97
414,300	1.03	414,403	1.65	414,174	0.79
414,325	1.21	414,433	1.69	414,193	0.47
414,336	1.38	414,500	1.76	414,205	0.37
414,360	1.46	414,536	1.79	414,216	0.16
414,400	1.81	414,645	1.79	414,227	—
414,426	1.68			414,246	0.46
414,457	1.73			414,270	0.75
414,518	1.78			414,286	0.94
414,579	1.79			414,306	1.10
414,645	1.80			414,318	1.25
414,890	1.75			414,360	1.51
				414,400	1.61
				414,408	1.66
				414,438	1.71
				414,494	1.77
				414,548	1.81
				414,612	1.81
				414,740	1.80

## a) Relation between equivalent electrical resistance and acoustic impedance

If the effect of the coupled fluid column on the oscillating crystal is treated as a parameter of the electrical equivalent circuit, from equations 2 and 3, one can see that the value of the equivalent resistance and reciprocal capacitance should vary linearly with  $PC$  provided  $S$  and  $T$  occurring therein are made equal to unity. This condition was secured in these experiments by making sure that the sound waves from the crystal surface were completely absorbed at the farther end of the container by suitably placed absorbents. In fig. 5, the values of  $PC$  of the media are plotted against the experimental values of  $R'$  the equivalent resistance and it is seen that the relation is linear with the range of experimental error. Air and Nitrogen seem to depart from this linear relation by about 6%. Probably Nitrogen is the only exception

Table I contd.

Nitrous Oxide Temp.: 24,0° C		Nitrogen Temp.: 24,0° C		Argon Temp.: 24,8° C	
Freq. kc/sec	E volts	Freq. kc/sec	E volts	Freq. kc/sec	E volts
413,370	1,79	413,370	1,79	413,370	1,77
413,400	1,80	413,430	—	413,480	1,76
413,455	1,82	413,491	1,810	413,660	1,73
413,491	1,82	413,562	1,810	414,794	1,65
413,550	1,82	413,672	1,82	413,854	1,62
413,635	1,83	413,780	1,78	413,890	1,55
413,822	1,78	413,854	1,72	413,925	1,32
413,896	1,45	413,914	1,00	413,956	0,91
413,932	1,26	413,932	1,51	413,975	1,34
413,958	1,67	413,975	1,69	414,007	1,53
413,975	1,74	413,986	1,69	414,067	1,48
414,000	1,73	414,041	1,65	414,127	1,25
414,048	1,65	414,060	1,60	414,145	1,11
414,097	1,50	414,108	1,26	414,162	0,96
414,140	1,26	414,140	1,11	414,193	0,67
414,162	1,04	414,162	0,87	414,205	0,47
414,175	0,91	414,195	0,59	414,216	0,19
414,193	0,73	414,200	0,47	414,227	—
414,204	0,57	414,210	—	414,240	0,31
414,210	0,39	414,216	0,16	414,264	0,62
414,216	0,18	414,227	—	414,293	0,91
414,220	0,20	414,246	0,28	414,325	1,22
414,228	—	414,270	0,57	414,355	1,51
414,258	0,37	414,293	0,88	414,402	1,63
414,270	0,59	414,318	1,19	414,457	1,71
414,290	0,85	414,348	1,40	414,518	1,74
414,306	1,00	414,373	1,51	414,668	1,71
414,324	1,19	414,408	1,62		
414,343	1,33	414,435	1,69		
414,376	1,46	414,518	1,76		
414,385	1,56	414,536	1,77		
414,404	1,61	414,645	1,78		
414,439	1,69	414,746	1,78		
414,463	1,73	414,828	1,76		
414,500	1,76				
414,535	1,787				
414,628	1,82				
414,705	1,81				
414,820	1,78				

Table II

Medium	P C 24° C	R' Ohms	K' farad	1/K'	Viscosity 24° C CGS Units	Q
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Vacuum . . . . .	—	455,0	$3,07 \cdot 10^{-14}$	$0,325 \cdot 10^{14}$	—	27540
Hydrogen . . . . .	10,93	512,4	$2,74 \cdot 10^{-14}$	$0,364 \cdot 10^{14}$	,000097	27328
Helium . . . . .	16,61	526,4	$2,71 \cdot 10^{-14}$	$0,369 \cdot 10^{14}$	,000199	26978
Nitrogen . . . . .	40,08	582,2	$2,56 \cdot 10^{-14}$	$0,390 \cdot 10^{14}$	,000186	25785
Air . . . . .	40,97	591,8	$2,75 \cdot 10^{-14}$	$0,363 \cdot 10^{14}$	,000180	23589
Oxygen . . . . .	43,43	655,1	$2,67 \cdot 10^{-14}$	$0,373 \cdot 10^{14}$	,000215	21920
Argon . . . . .	54,56	705,3	$2,37 \cdot 10^{-14}$	$0,421 \cdot 10^{14}$	,000230	22972
Carbon dioxide . . .	48,84	649,8	$2,31 \cdot 10^{-14}$	$0,434 \cdot 10^{14}$	,000150	25664
Nitrous Oxide . . .	49,67	649,8	$2,54 \cdot 10^{-14}$	$0,393 \cdot 10^{14}$	,000160	23277

and air being a mixture of nitrogen (80%) and oxygen varies as much as Nitrogen.

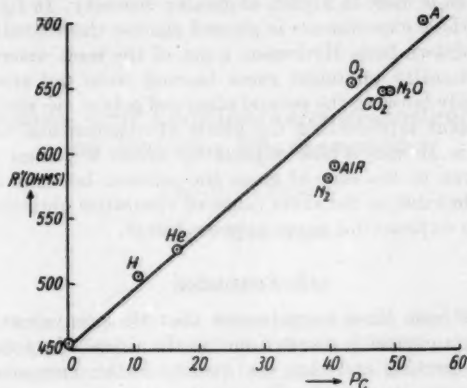


Fig. 5

#### b) Effect of the acoustic impedance on equivalent capacitance

The reciprocal of the equivalent capacitance of the quartz crystal at resonance also should vary linearly with acoustic impedance (equation 5). From column (1) and column (4) of Table II it is found that the variation is not linear.

#### c) Change of $Q$ with viscosity

It has been shown<sup>a)</sup> that in the case of a quartz crystal oscillating in liquids, the quality factor  $Q$  decreases exponentially as the viscosity of the

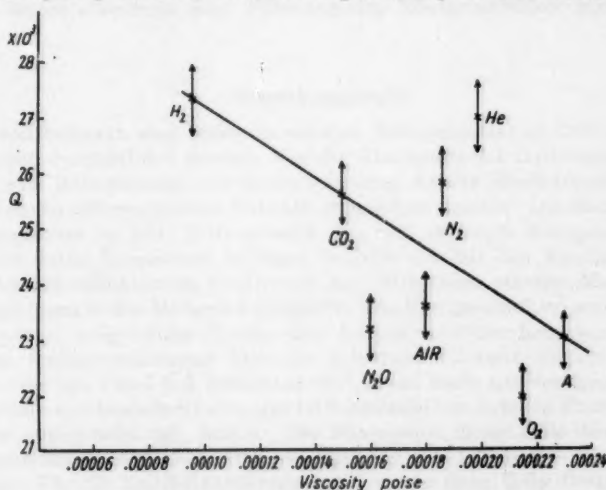


Fig. 6

<sup>a)</sup> S. Parthasarathy and A. F. Chhapgar, Ann. Physik 12, 316 (1953).

liquid increases. In other words, it means that the damping of the amplitude of oscillation is more in liquids of greater viscosity. In fig. 6, the  $Q$  of the crystal used in these experiments is plotted against the viscosity of the media. A straight line drawn from Hydrogen, a gas of the least viscosity, to Argon, of maximum viscosity (amongst gases barring Neon not studied here), lies more or less evenly between the several observed points, the vertical line passing through each point representing the limits of experimental error. The only exception here is Helium which departs by about 9% from this line. It is possible that even in the case of gases the relation between  $Q$  and viscosity is exponential, but due to the short range of viscosities obtaining in gases, the small part of an exponential curve appears linear.

### 5. Conclusion

We conclude from these experiments that the equivalent electrical resistance of a quartz crystal is proportional to the acoustic impedance of the gas in which it is vibrating and that the quality factor decreases exponentially with increasing viscosity as in liquids but the range being smaller, the relation is linear.

New Delhi 12, National Physical Laboratory of India.

Bei der Redaktion eingegangen am 24. Februar 1954.

## **Absorptions- und Leitfähigkeitsmessungen an CdS im weichen Röntgengebiet**

Von E. Schnürer

Mit 6 Abbildungen

### **Inhaltsübersicht**

Es wird gezeigt, daß sich die Absorptionskanten der Komponenten des CdS in der photoelektrischen Leitfähigkeit dieses Stoffes ausprägen.

Ziel der vorliegenden Arbeit war, Absorptions- und Leitfähigkeitsmessungen im weichen Röntgengebiet durchzuführen und festzustellen, ob sich an den Cadmium-K-, Cadmium-L- und an der Schwefel-K-Absorptionskante Unregelmäßigkeiten feststellen lassen. Mit einer Versuchsanordnung, bei der sich die zu untersuchenden Kristalle im Röntgenröhrenvakuum befanden, wurde die Absorption von Cadmiumsulfid-Einkristallen in der Umgebung der Cadmium-K-Absorptionskante gemessen; bei den Leitfähigkeitsmessungen wurden die theoretisch zu erwartenden Sprünge an den Cadmium-K- und Cadmium-L-Absorptionskanten beobachtet. In einer nachträglich bekanntgewordenen Arbeit von S. W. Swetschnikow<sup>1)</sup> wird ein Sprung der Empfindlichkeit (Leitfähigkeit) bei  $\lambda = 0,46 \text{ \AA}$  (Cadmium-K-Absorptionskante) mitgeteilt. Diese Arbeit wurde allerdings ohne Filterung der Röntgenstrahlen durchgeführt.

### **Versuchsapparatur**

Soweit bekannt, sind bisher im weichen Röntgengebiet an CdS noch keine Messungen durchgeführt worden. Um die Absorption der Luft auszuschalten, wurde eine Röntgenröhre mit einem seitlichen Ansatz (Meßkammer) gebaut, in dem die zu untersuchenden Kristalle angeordnet wurden. Die Meßapparatur ist schematisch in Abb. 1 dargestellt. Da sich zwischen Röntgenröhre und Absorber keine Trennwand befindet, wurden die mit den Röntgenstrahlen austretenden reflektierten Elektronen mit Hilfe eines starken Magnetfeldes am Eindringen in das Meßgefäß gehindert. Die Röntgenstrahlen wurden durch entsprechend ausgewählte Kupfer- und Aluminium-Filter homogenisiert.

Eine Ionisationskammer bzw. ein Interferenzzählrohr, die im Röntgengebiet zwischen 2 und 5 Å brauchbar sind, stand nicht zur Verfügung.

Deshalb wurde als Indikator eine CdS-Meßzelle am äußeren Ende der Meßkammer angebracht, vgl. Abb. 1. Der Photostrom dieser Zelle dient bei den Absorptionsmessungen als relatives Maß für die Intensität der Röntgenstrahlen. Für die Leitfähigkeitsmessungen wurde diese Zelle direkt benutzt.

<sup>1)</sup> S. W. Swetschnikow, *Techn. Phys. USSR* **1952**, 22; vgl. auch: Trohn-meyer, Glocker, Messner, *Naturwissensch.* **1953**, 12.

Der Querschnitt des Röntgenstrahlenbündels wurde so bemessen, daß der gesamte Kristall der CdS-Zelle ausgeleuchtet war. Zwischen das Filter, das ohne Öffnen der Röhre ausgewechselt werden konnte, und der Indikatorzelle wurde der zu untersuchende Absorber gebracht; die eventuell aus dem Absorber ausgelösten äußeren Photoelektronen wurden durch ein elektrisches Feld abgesaugt. Mit der relativ kleinen Röntgenstrahlintensität konnten nur kleine Leitfähigkeitsströme erzielt werden. Aus diesem Grunde wurden sie

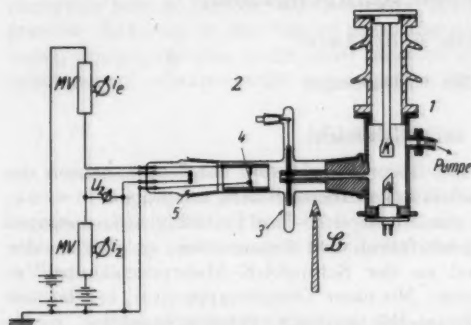


Abb. 1. Schematische Ansicht der Versuchsanordnung. 1: Röntgenröhre, A: Anode, K: Kathode, 2: Meßkammer, B: Magnetfeld zur Ablenkung vagabundierender Elektronen, 3: Filteranordnung, 4: Absorberträger und Absorber, 5: Meßzelle, MV: Meßverstärker,  $i_1$ : Photostrom der Meßzelle,  $U_z$ : Spannung an der Meßzelle,  $i_2$ : Strom der aus dem Absorber ausgelösten äußeren Photoelektronen

so daß die Halbwertsbreite nicht mehr als 20% des kurzwelligen Endes des Röntgenbremsspektrums betrug. Z. B. lag bei

der Röhrenspannung von . . . . .	8,3 kV	33,5 kV
die kurzwellige Grenze bei . . . . .	1,5 Å	0,37 Å
und mit Benutzung eines Filters aus . . . . .	Al 0,1 mm	Cu 0,1 mm
war die Halbwertsbreite des homogenisierten R-Bündels . . . . .	0,3 Å	0,08 Å

Jedes Filter ließ sich in einem größeren zusammenhängenden Wellenlängenbereich benutzen, ohne daß sich die Halbwertsbreite wesentlich änderte. Daher ließ sich die Methode, die Messungen in Abhängigkeit von der Grenzwellenlänge des Bremsspektrums durchzuführen, rechtfertigen.

Für die Absorptionsmessungen genügten relative Intensitätsmessungen wie sie mit einer CdS-Meßzelle durchgeführt werden konnten. Die in unserem Institut hergestellten CdS-Zellen zeichnen sich durch eine außerordentlich gute Konstanz aus.

Messungen an CdS mit einem CdS-Indikator vorzunehmen, wird im ersten Augenblick Kritik herausfordern. Die Meßmethode und ihre Anwendung für Absorptionsmessungen sind einwandfrei, wenn sichergestellt ist, daß der Photostrom einer solchen CdS-Zelle im jeweiligen Wellenlängenbereich proportional der Strahlungsintensität ist. Diese Tatsache war auf Grund zahlreicher im Institut für Festkörperforschung vorgenommenen Messungen

mit einem Gleichstrommeßverstärker gemessen, dessen Eingangswiderstand etwa  $10^7$  Ohm und dessen größte Empfindlichkeit  $10^{-12}$  Amp. pro Skalenteil betrug. Da der Eingangswiderstand des Meßverstärkers und die CdS-Meßzelle hintereinander geschaltet waren, wurde der Spannungsabfall an der Zelle laufend kontrolliert und wenn nötig nachgeregelt, so daß an der CdS-Zelle immer dieselbe Saugspannung lag.

Für die Messung stand ein Röntgenmonochromator nicht zur Verfügung. Es wurde zur Homogenisierung der Strahlung ein Filterverfahren angewandt,



sichergestellt. Darüber hinaus sei bemerkt, daß die Kristalle einen sehr kleinen Dunkelstrom von  $5 \times 10^{-12}$  Amp. bei 2 Volt Saugspannung hatten, völlig frei von Gleichrichtereffekten waren und sich momentan auf den Endwert einstellten.

## Durchführung der Messungen und ihre Ergebnisse

### a) Die Absorptionsmessungen

Zwischen 0,3 und 1,5 Å wurde der GesamtabSORPTIONSKoeffizient von CdS-Einkristallen gemessen. In diesem Gebiet war der Photo-

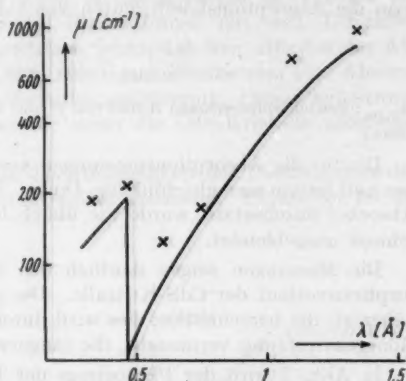


Abb. 2. Absorptionsverlauf von CdS-Einkristallen zwischen 0,3 und 1,4 Å. (Der Absorptionssprung entspricht der Cd-K-Kante.)  $\mu$ : Absorptionskoeffizient,  $\lambda$ : Wellenlänge,  $\times$ : gemessene Werte; die ausgezogene Kurve ist der berechnete Absorptionsverlauf

Wertetabelle zur Abb. 2

Wellenlänge [Å]	$\mu$ gemessen [cm <sup>-1</sup> ]	$\mu$ berechnet [cm <sup>-1</sup> ]
1,35	960	820
1,1	740	500
0,75	172	150
0,6	122	85
0,46	215	190
0,33	185	130

strom der Indikatorzelle proportional der Intensität der gefilterten Röntgenstrahlung. Daher läßt sich bei bekannter Dicke des Absorbers der Absorptionskoeffizient aus relativen Messungen bestimmen. In Abb. 2 sind die erhaltenen Meßpunkte eingetragen. Die ausgezogene Kurve gibt den berechneten Absorptionsverlauf in diesem Gebiet wieder. Mit Hilfe der Jönssonschen Universalabsorptionskurve wurden die Absorptionskoeffizienten vom Cd berechnet, die vom S wurden aus Landolt-Börnstein entnommen; daraus erhält

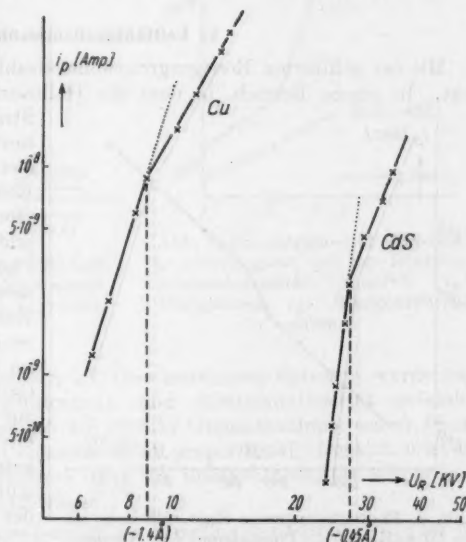


Abb. 3. Bestimmung der Lage einer Absorptionskante mit Hilfe einer CdS-Meßzelle. Dem Knick im Photostromverlauf der Meßzelle entspricht eine Absorptionskante. Bei Cu liegt die K-Kante vor und bei CdS die Cd-K-Kante.  $i_p$ : Photostrom der Meßzelle,  $U_R$ : Röntgenröhrenspannung,  $\lambda$ : Grenzwellenlänge

man die Absorptionskoeffizienten von CdS mit Hilfe der Formel:

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{CdS}} = \frac{\alpha_{\text{S}}}{100} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{S}} + \frac{\alpha_{\text{Cd}}}{100} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{Cd}}$$

( $\alpha_{\text{S, Cd}}$ : gewichtsprozentualer Anteil von S und Cd an CdS,  $\mu/\rho$  Massenabsorptionskoeffizient.)

Die für die Absorptionsmessungen ausgesuchten Kristalle sahen homogen aus und hatten eine gleichmäßige Dicke. Das Röntgenstrahlenbündel, das den Absorber durchsetzte, wurde wie üblich bei Absorptionsmessungen möglichst schmal ausgeblendet.

Die Messungen zeigen deutlich das Auftreten der Cd-K-Kante im Absorptionsverlauf der CdS-Kristalle. Die gemessenen Werte liegen durchweg höher als die berechneten; dies wird durch die merkliche Halbwertsbreite der Röntgenstrahlung verursacht, die längerwellige Anteile enthält.

In Abb. 3 wird der Photostrom der Indikatorzelle in Abhängigkeit von der Wellenlänge der eingestrahnten Röntgengrenzstrahlung angegeben, wobei ein CdS- oder ein Cu-Absorber in den Strahlengang gebracht wurde. Das Röntgenlicht wird im Fall von CdS mit 0,1 mm Cu und im Fall von Cu mit 0,1 mm Al gefiltert, die Knickstellen im Photostromverlauf der Indikatorzelle zeigen hier unmittelbar die Lage einer Absorptionskante an. In beiden Fällen handelt es sich um K-Kanten (Cd und Cu).

#### b) Leitfähigkeitsmessungen

Mit der gefilterten Röntgengrenzwellenstrahlung wird eine CdS-Zelle angeregt. In einem Bereich, in dem die Halbwertsbreite des homogenisierten

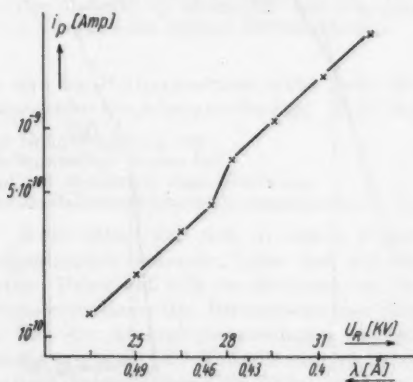


Abb. 4. Photostromsprung einer CdS-Zelle an der Cd-K-Kante.  $i_p$ : Photostrom,  $U_R$ : Röntgenröhrenspannung,  $\lambda$ : Grenzwellenlänge

Strahles 20% des Grenzwellenwertes nicht übersteigt, wird das gleiche Filter beibehalten. Die Röhrenspannung (und damit die Grenzwellenlänge) wird variiert und in Abhängigkeit davon der Photostrom der CdS-Zelle gemessen. Im Gebiet von 2 bis 7 kV Röhrenspannung wird ein Al-Filter der Dicke 0,1 mm benutzt und im Gebiet von 26 bis 31 kV ein Cu-Filter von 0,1 mm. Die zur Röhrenspannung gehörenden Grenzwellenlängen sind mit eingetragen. Die beiden folgenden Abbildungen zeigen das Ergebnis der Messungen.

Wir finden in Abb. 4, daß sich der Photostrom im Gebiet von 0,46 Å bis 0,43 Å und in

Abb. 5 im Gebiet von 3,5 Å bis 2,8 Å unstetig ändert. Er springt beim Überstreichen dieser Gebiete, mit abnehmender Wellenlänge der Grenzstrahlung plötzlich auf einen größeren Wert. Bei 3,078 Å, 3,319 Å und 3,496 Å liegen die

drei L-Absorptionskanten und bei  $0,463 \text{ \AA}$  die K-Kante des Cd. Da die beiden registrierten Unstetigkeiten des Photostromes mit den L-Kanten bzw. der K-Kante des Cd zusammenfallen, wirkt sich hier offenbar der Absorptionssprung des Cd auf den im CdS angeregten Photostrom aus. Absorptionssprung und Photostromsprung verlaufen gleichsinnig. Diese Photostromsprünge treten am deutlichsten hervor, wenn die CdS-Kristalle möglichst dünn sind.

Im weichen Röntgengebiet wurde die Abhängigkeit des Photostromes der CdS-Zellen von der Röntgenstrahlenintensität gemessen. Parameter ist die

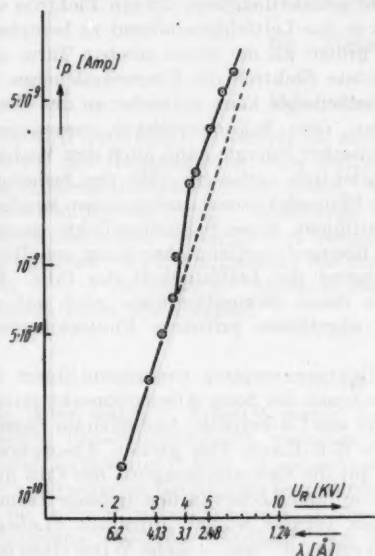


Abb. 5. Photostromsprung einer CdS-Zelle an den Cd-L-Kanten.  $i_p$ : Photostrom,  $U_R$ : Röntgenröhrenspannung,  $\lambda$ : Grenzwellenlänge

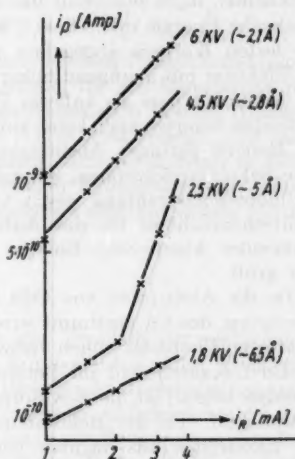


Abb. 6. Photostrom einer CdS-Zelle in Abhängigkeit von der Röntgenstrahlenintensität (relativ).  $i_p$ : Photostrom,  $i_R$ : Röntgenröhrenstrom

Röntgenröhrenspannung. Von 4,5 kV Grenzstrahlung aufwärts wurde stets Proportionalität zwischen Photostrom und Röntgenintensität gefunden. Zwischen 1,8 kV ( $6,5 \text{ \AA}$ ) und 4,5 kV ( $2,8 \text{ \AA}$ ) Grenzstrahlung waren Photostrom und Röntgenintensität einander nicht proportional. In Abb. 6 ist der Photostrom über dem Röhrenstrom (dem die Röntgenintensität proportional ist) doppelt logarithmisch aufgetragen.

Bei  $6,5 \text{ \AA}$  Grenzwellenlänge beträgt die Steigung der Geraden  $1/2$ ; bei  $5 \text{ \AA}$  Grenzwellenlänge beträgt die Steigung erst  $2/3$ , dann folgt ein Knick im Photostrom und bei weiterer Intensitätssteigerung hat die Steigung einen Wert größer als 1. Es ist möglich, daß dieses Intensitätsverhalten des Photostromes auf das Mitwirken der Schwefel-K-Kante, die bei  $5 \text{ \AA}$  liegt, zurückzuführen ist.

Die Ergebnisse der Messungen sind so zu erklären:

Dort, wo die Absorption eine größere ist, werden aus den entsprechenden Termen des CdS mehr Photoelektronen abgelöst und infolgedessen können mehr Elektronen in das Leitfähigkeitsband des CdS gelangen; damit wird der Photostrom auch größer. Ändert sich nun der Absorptionskoeffizient unstetig, wie es an den Absorptionskanten der Fall ist, dann ist zu erwarten, daß sich der Photostrom unstetig ändert, so wie es auch gemessen wurde. An einer Absorptionskante haben die eingestrahlten Röntgenquanten gerade die Energie, die einem bestimmten Elektronenniveau entspricht. Das heißt, die Energie der Röntgenquanten reicht gerade dazu aus, um ein Elektron von einem solchen Term abzulösen und es in das Leitfähigkeitsband zu befördern. Ist die Energie der Röntgenquanten größer als die einem solchen Term entsprechende, dann bekommt das abgelöste Elektron die Überschussenergie als kinetische Energie mit. Diese Überschussenergie kann entweder an das Gitter des festen Körpers abgegeben werden, oder Sekundäreffekte verursachen; ein Elektron mit genügend hoher kinetischer Energie kann auch den Verband des festen Körpers als äußeres Photoelektron verlassen. (Mit den bisherigen Methoden konnten noch keine äußeren Photoelektronen nachgewiesen werden.) Im Bereich geringer Absorption bestimmen diese Sekundäreffekte (ausgelöste Sekundärelektronen, sekundäre Röntgenstrahlung, Anregung von Röntgenfluoreszenzstrahlung usw.) vorwiegend die Leitfähigkeit des CdS. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Sekundäreffekte wird mit zunehmender kinetischer Energie der abgelösten primären Photoelektronen sehr groß.

Da die Absorption von CdS bei Röntgenanregung vorwiegend durch die Absorption des Cd bestimmt wird, stammen die beim Absorptionsakt primär abgelösten Photoelektronen vorwiegend aus Cd-Termen. Lediglich im Bereich der Cd-L-Kanten und im Bereich der S-K-Kante (des großen Absorptionssprunges wegen) ist die S-Absorption für die GesamtabSORPTION des CdS mitbestimmend. Bei der Rekombination werden Löcher in den tieferen Termen von Elektronen aus darüber liegenden Termen wieder aufgefüllt (Lebensdauer von Löchern in tieferen Termen etwa  $10^{-7}$  sec. — siehe Wien-Harms, Handb. d. Exp. Phys., Bd. 24, 1); bei dieser Rekombination wird die entsprechende Röntgenfluoreszenzstrahlung emittiert. Sind dann die Löcher im Valenzband angelangt, dann setzt der Rekombinationsmechanismus ein, wie man ihn von der Anregung mit sichtbarem Licht her kennt. Löcher in tiefen Termen können wegen ihrer kurzen Lebensdauer und infolge ihrer Unbegrenzlichkeit keinen Beitrag zum Photostrom liefern.

Die vorliegenden Messungen haben zunächst nur orientierenden Wert. Die Untersuchungen werden nach Fertigstellung eines Röntgenmonochromators fortgesetzt.

Herrn Prof. Dr. F. Möglichen und Herrn Dr. H. Simon danke ich für ihre Unterstützung und für anregende Diskussionen.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 6. März 1954.

## **Zur Berechnung von Elektroneninterferenzen an Zwillingskristallen<sup>1)</sup>**

Von *Heribert Jahrreiß*

Mit 4 Abbildungen

### **Inhaltsübersicht**

Es wird untersucht, inwieweit die elektronenoptischen Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten eines Zwillingskristalls für die Berechnung des Beugungsdiagramms eine Rolle spielen. An einem speziellen Beispiel (flächenzentriert-kubisches Gitter, verzwillingt nach (111)) wird gezeigt, daß diese Phasenbeziehungen vernachlässigt werden können, falls der Kristall in Richtung senkrecht zur Zwillingsebene die Dicke weniger Elementarzellen — etwa 30 bis 40 Å — überschreitet. Methode und Ergebnisse sind auf andere Gitterkonfigurationen übertragbar.

### **I.**

In einer früheren Arbeit<sup>2)</sup> wurde bereits das Problem der elektronenoptischen Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten eines Zwillingskristalls angedeutet: Man berechnet das Elektroneninterferenzdiagramm eines aus mehreren Kristalliten bestehenden Präparates üblicherweise so, daß man die Intensitätsverteilungen (d. h. die Quadrate der Beugungsamplituden) der einzelnen Kristallite überlagert oder mit anderen Worten die Ewaldsche Konstruktion anwendet auf ein reziprokes Gitter (rezG), das eine Ineinanderschachtelung der rezG der einzelnen Kristallite darstellt. Die Berechnung der Intensitätsverteilungen ist dabei in bekannter Weise unter Berücksichtigung der üblichen Faktoren durchzuführen. Dieses Vorgehen ist streng richtig, wenn die einzelnen Kristallite unabhängig voneinander streuen, also keine elektronenoptische Phasenbeziehung zwischen ihnen besteht. Wir wollen diesen Fall den „Inkohärenzfall“ nennen. — Bestehen dagegen zwischen einzelnen Kristalliten solche Phasenbeziehungen, etwa dadurch, daß zwei räumlich verschieden orientierte Kristallite der gleichen Substanz eine Netzebene gemeinsam haben (Verzwilligung), so sprechen wir vom „Kohärenzfall“. Hier sind die abgebeugten Amplituden der beteiligten Kristallite zu überlagern und aus deren Summe durch Quadrierung die Gesamtintensitätsverteilung zu bestimmen. Die Ineinanderschachtelung der rezG der Einzelkomponenten gibt also die Verhältnisse im Kohärenzfall nicht genau, höch-

<sup>1)</sup> Vorgetragen auf der Frühjahrstagung 1954 der Nordwestdeutschen Physikalischen Gesellschaft in Goslar.

<sup>2)</sup> H. Jahrreiß, Ann. Physik (6) 14, 319 (1954).

stens näherungsweise richtig wieder. Da aber diese Methode bisher verschiedentlich bei der Diskussion von Beugungseffekten an Zwillingskristallen benutzt wurde (Cochrane<sup>3</sup>), Kirchner und Rüdiger<sup>4</sup>), Menzer<sup>5</sup>), vgl. auch den zusammenfassenden Bericht von Raether<sup>6</sup>), S. 91 ff.), soll die Berechtigung dieses Verfahrens im folgenden geprüft werden.

Dazu muß man das Ergebnis von Berechnungen der Intensitätsverteilung der gleichen Kristallkonfiguration mit und ohne Berücksichtigung der Phasenbeziehung miteinander vergleichen. Den Berechnungen wird ein Modell zugrunde gelegt, dem einige ideallisierende Bedingungen vorgeschrieben werden müssen. Trotz dieser Einschränkung sollte das Ergebnis auch die Beurteilung der Verhältnisse im allgemeinen Fall mit hinreichender Genauigkeit gestatten. — Es wird sich zeigen, daß ein nennenswerter Unterschied zwischen Kohärenz- und Inkohärenzfall nur auftritt, wenn beide Kristallite in der Richtung senkrecht zu der gemeinsamen Netzebene nur wenige Elementarzellen übereinander aufweisen, d. h., wenn wir es näherungsweise mit Flächengittern zu tun haben. Daher reicht die geometrische Theorie der Elektroneninterferenzen als Rahmen der folgenden Überlegungen aus.

## II.

Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf ein spezielles Modell mit folgenden Eigenschaften: Man habe zwei miteinander verzwilligte Gitter beliebiger Art. Diese sollen senkrecht zur Zwillingssebene gleichviel Atomlagen übereinander aufweisen, wobei je eine zur Zwillingssebene parallele Ebene die obere und untere Begrenzung des gesamten  $\bar{M}$  Atomlagen aufweisenden Komplexes bilde. Nach den beiden anderen Raumkoordinatenrichtungen sei der Komplex beliebig weit ausgedehnt. Die beiden Zwillingskomponenten seien mit I und II bezeichnet. — Es ist bequem, für die weiteren Überlegungen zu einem Koordinatensystem überzugehen, dessen eine Achse die Richtung senkrecht zur Zwillingssebene habe („c-Achse“); die beiden anderen Richtungen weisen dann in der Zwillingssebene von einem Atom zu je einem seiner nächstenbenachbarten Atome. In der c-Richtung entspricht die Identitätsperiode einer bestimmten Anzahl  $n$  von Atomlagen übereinander. Innerhalb des neuen Koordinatensystems gibt es für I und II je eine Elementarzelle; die Schichthöhe von I und II in c-Richtung entspricht dann je  $\bar{M}/2 \cdot n = M$  Elementarzellenhöhen. Im neuen Koordinatensystem erhalten die einzelnen Netzebenenscharen natürlich andere Indices. — Wir haben nun für dieses Kristallitmodell die Intensitätsverteilung zu berechnen einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der Phasenbeziehung:

1. Für ein allseitig unendlich ausgedehntes Gitter erhält man ein rezG mit punktförmigen Intensitätsbereichen. Die Intensität in den intensitätsbehafteten Punkten bestimmt der Strukturfaktor. Wir betrachten nun die Gittergeraden des rezG, die senkrecht zur Zwillingssebene verlaufen, d. h. die geometrischen Orte der Gitterpunkte des rezG mit den Indices ( $a_1 a_2 x$ ), wo  $a_1$  und  $a_2$  ganze Zahlen,  $x$  laufende Koordinate. Haben I und II — wie

<sup>3</sup>) W. Cochrane, Proc. phys. Soc. 48, 723 (1936).

<sup>4</sup>) F. Kirchner u. O. Rüdiger, Ann. Physik (5) 30, 609 (1937).

<sup>5</sup>) G. Menzer, Z. Kristallogr. 99, 378 (1938) u. 99, 410 (1938).

<sup>6</sup>) H. Raether, Ergebnisse d. exakt. Naturw. XXIV, 54 (1951).



ursprünglich vorausgesetzt — eine nur endliche Ausdehnung in Richtung senkrecht zur Zwillingssebene, während die beliebig weite Ausdehnung in den beiden anderen Richtungen erhalten bleibt, so erweitern sich die Intensitätsbereiche längs dieser Gittergeraden, während senkrecht dazu keine Bereichserweiterung stattfindet (Bragg und Kirchner<sup>7</sup>), sowie Kirchner<sup>8</sup>). Die Problemstellung reduziert sich also auf die Frage nach der Intensitätsverteilung längs dieser Geraden. Ist nämlich diese Intensitätsverteilung bekannt, dann ist das resultierende Beugungsdiagramm sofort durch Anwendung der Ewaldschen Konstruktion zu ermitteln. Bei diesem Übergang vom rezG zum Beugungsdiagramm kommen natürlich nur Gitterpunkte bzw. Intensitätsbereiche des rezG in Frage, die so niedrig indiziert sind, daß ihnen im Kristallgitter ausgebildete Netzebenenscharen entsprechen. Ferner ist für die Beurteilung der Intensität der einzelnen Reflexe der Flächenhäufigkeitsfaktor, Lorentzfaktor usw. in üblicher Weise zu berücksichtigen. Uns soll aber im weiteren Verlauf der Überlegungen nur der Intensitätsverlauf längs der erwähnten Gittergeraden interessieren, wie er sich aus der Berücksichtigung von Struktur- und Gitterfaktor allein ergibt.

2. Zur Berechnung der Intensitätsverteilung ohne Berücksichtigung der Phasenbeziehung (Inkohärenzfall) haben wir für jede der Komponenten I und II die aus dem Strukturfaktor errechenbare Intensitätsverteilung  $S^2(x)$  längs der betreffenden  $(a_1 a_2 x)$ -Gittergeraden zu multiplizieren mit der vom Gitterfaktor herrührenden Intensitätsverteilungsfunktion  $G^2(x, M)$ , so daß sich für I und II je eine Intensitätsverteilung  $\Sigma_I^2(x, M) = S_I^2(x) \cdot G_I^2(x, M)$  bzw.  $\Sigma_{II}^2(x, M) = S_{II}^2(x) \cdot G_{II}^2(x, M)$  ergibt. Hier wird speziell  $G_I^2 = G_{II}^2$  wegen der Voraussetzung gleicher Anzahlen von Elementarzellschichten übereinander in I und II. Die Gesamtintensitätsverteilung für den Inkohärenzfall wird dann

$$\Sigma_k^2(x, M) = \Sigma_I^2(x, M) + \Sigma_{II}^2(x, M) = \{S_I^2(x) + S_{II}^2(x)\} \cdot G^2(x, M). \quad (1)$$

Hierin ist zu setzen für jede Gittergerade

$$G^2(x, M) = \frac{\sin^2 M \pi x}{\sin^2 \pi x} \quad (\text{vgl. z. B. v. Laue}^9), \text{ S. 112}). \quad (2)$$

Hingegen sind die  $S_I^2$  und  $S_{II}^2$  verschieden für die einzelnen Gittergeraden. Bei jedem Gittertyp gibt es aber immer nur ein endliche Anzahl Arten von Gittergeraden des rezG in  $c$ -Richtung, die sich in ihrer Intensitätsbelegung unterscheiden (beim kubisch-flächenzentrierten z. B. 3 Arten). Beim Fortschreiten innerhalb des rezG in  $a_1$ - oder  $a_2$ -Richtung kehren die Vertreter der einzelnen Arten in periodischer Reihenfolge wieder.

3. Die Berechnung der Intensitätsverteilung mit Berücksichtigung der Phasenbeziehung (Kohärenzfall) soll in der Weise erfolgen, daß die gesamte Kristallitschicht betrachtet wird als Aneinanderreihung von Prismen mit der gleichen Grundfläche, wie sie die Elementarzellen von I und II aufweisen, und der Höhe der gesamten Schicht — also  $\bar{M} = 2 n M$  Atomlagen übereinander — als Prismenhöhe (Abb. 1). Jedes solche Prisma mit den darin enthaltenen Atomen kann man betrachten als eine „Mammutelementarzelle“, deren Strukturfaktor sich nach Kenntnis der Atomkoordinaten im Inneren

<sup>7</sup>) W. L. Bragg u. F. Kirchner, Nature **127**, 738 (1931).

<sup>8</sup>) F. Kirchner, Ann. Physik (5) **18**, 38 (1932).

<sup>9</sup>) M. v. Laue, Materiewellen und ihre Interferenzen, 2. Aufl., Leipzig 1948.



des Prismas berechnen läßt. Dieser Strukturfaktor  $S^2$  ist nicht mehr wie oben  $S_I^2$  und  $S_{II}^2$  nur eine Funktion von  $x$ , sondern auch abhängig von der Anzahl der Atomlagen  $\bar{M}$ . Da der Kristallit nur aus einer Lage dieser Mammut-

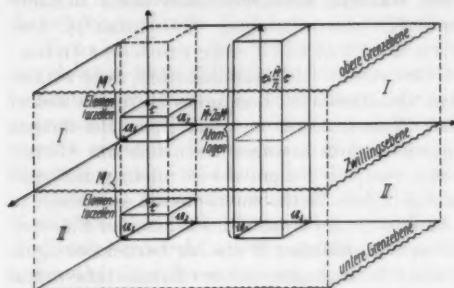


Abb. 1. Zugrunde liegendes Kristallmodell. Links Inkohärenzfall (Summierung über je  $M$  Elementarzellen in I und II), rechts Kohärenzfall („Mammut-elementarzelle“ mit  $\bar{M} = 2nM$  Atomlagen)

### III.

Das skizzierte Programm wurde insbesondere durchgeführt für zwei miteinander nach (111) verwilligte kubisch-flächenzentrierte Gitter. Hier wird speziell  $n = 3$ ; die einzelnen Atomlagen sind von gleicher Belastung und äquidistant. Im neuen Koordinatensystem vom hexagonalen Typ erhalten die der Zwillingschene parallelen Oktaederebenen die Indices 003, 006, ... Man kann nach ihrer Intensitätsbelegung 3 Arten von Gittergeraden unterscheiden; die Geraden mit (00 $x$ ), (10 $x$ ) und (01 $x$ ) gehören zu je einer dieser Arten. Allgemein gelten für die Zugehörigkeit einer Gittergeraden mit den Indices ( $a_1 a_2 x$ ) zu einer der 3 Arten die Regeln:

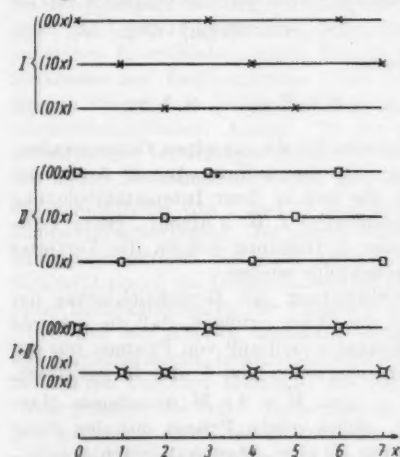


Abb. 2. Intensitätsbelegung verschiedener Gittergeraden des rezG für unendlich ausgedehnte Gitter in Grundorientierung (I) und Zwillingsorientierung (II), sowie für Überlagerung beider Typen (I + II)

elementarzellen besteht, wird der Gitterfaktor konstant  $G^2 = 1$ , und der Strukturfaktor gibt für sich allein die Intensitätsverteilung im Kohärenzfall

$$\Sigma_L^2(x, \bar{M}) = S^2(x, \bar{M}). \quad (3)$$

Um unsere Rechnungsergebnisse vergleichen zu können mit den Resultaten von 2., beschränken wir uns auf solche  $\bar{M}$ , die durch  $2n$  teilbar sind, so daß gilt

$$\Sigma_L^2(x, M) = S^2(x, M) \quad \text{mit } M = \bar{M}/2n. \quad (4)$$

Ist für I  $a_2 - a_1 \equiv m \pmod{3}$  oder für II  $a_1 - a_2 \equiv m \pmod{3}$ , so gehört die betreffende Gittergerade zu einer Art, bei der sich für unendlich ausgedehnte Kristallgitter Intensitätsbelegung findet für ganzzahlige  $x$  mit  $x \equiv m \pmod{3}$ . Dabei sind also die Gittergeraden des rezG von I mit  $m=0$  identisch mit denen von II mit gleicher Restklassenzugehörigkeit. Außerdem decken sich die Gittergeraden von I mit  $m=1$  mit denen von II mit  $m=2$  und umgekehrt. Die Intensitätsbelegung der einzelnen Geradentypen zeigt Abb. 2, die Lage ihrer Fußpunkte in der zur Zwillingschene parallelen Grunde Ebene des rezG veranschaulicht Abb. 3. Man sieht, daß eigentlich nur mehr 2 Arten von Gittergeraden übrigbleiben nach Überlagerung der rezG von I und II, wenn man keinen Wert darauf legt zu unterscheiden, welche Interferenzpunkte von I und welche von II stammen.

Im Inkohärenzfall erhält man für die Gerade mit (00x):

$$S_0^2(x) = S_{II}^2(x) = 3 + 4 \cos \frac{1}{3} 2\pi x + 2 \cos \frac{2}{3} 2\pi x, \quad (5)$$

für die Gerade mit (10x):

$$S_I^2(x) = 1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AB + 2CD - 2C - 2D, \quad (6)$$

wo

$$A = \sqrt{3} \sin \pi x \cdot \sin \frac{1}{3} \pi x$$

$$B = \sin \pi x \cdot \cos \frac{1}{3} \pi x$$

$$C = -\sqrt{3} \cos \pi x \cdot \sin \frac{1}{3} \pi x$$

$$D = \cos \pi x \cdot \cos \frac{1}{3} \pi x,$$

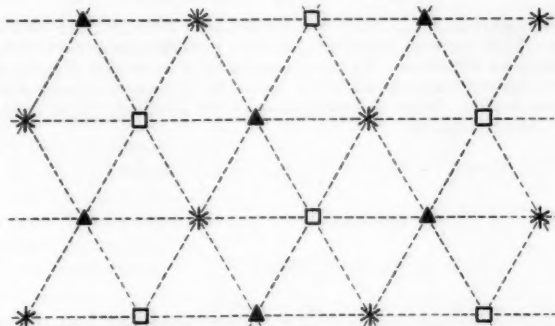


Abb. 3. Fußpunkte der Gittergeraden verschiedenen Typs in der zur Verzwillingungsebene parallelen Grundebene. Die Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von  $x$  für unendlich ausgedehntes Gitter ist bei allen durch ein Quadrat gekennzeichneten Geraden dieselbe wie für die (00x)-Gerade in Abb. 2, entsprechend bedeutet ein Dreieck den Typ (10x) und ein Stern den Typ (01x)

und mit den gleichen Bezeichnungen

$$S_{II}^2(x) = 1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB - 2CD + 2C - 2D, \quad (7)$$

für die Gerade mit (01x):

$$S_I^2(x) \text{ von (01x)-Gerade} = S_{II}^2(x) \text{ von (10x)-Gerade und umgekehrt.} \quad (8)$$

Für die Geraden mit (10x) und (01x) wird also mit (6) und (7) für die in (1) auftretende Summe

$$S_I^2(x) + S_{II}^2(x) = 2(1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2D) \quad (9)$$

$$= 4(1 + \sin^2(\frac{1}{3}\pi x) - \cos \pi x \cdot \cos \frac{1}{3}\pi x).$$

Man beachte die Periodizität aller  $S^2(x)$  im Intervall  $0 \leq x < 3 = n$ .

Im Kohärenzfall ergibt die Durchrechnung für  $\bar{M} \equiv 0 \bmod 3$  für die Gerade mit  $(a_1 a_2 x)$ , wenn wir die Variable zunächst mit  $x'$  bezeichnen:

$$S(x', \bar{M}) = \left( \sum_{v=0}^{\frac{\bar{M}}{3}-1} \exp 2\pi i v \frac{3x'}{\bar{M}} \right) \cdot \left[ 1 + \exp i\pi x' \right. \\ + \exp 2\pi i \left( \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2\pi i \frac{x'}{\bar{M}} \\ + \exp 2\pi i \left( \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2\pi i \frac{x'}{\bar{M}} \left( \frac{\bar{M}}{2} + 2 \right) \\ + \exp 2\pi i \left( \frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2\pi i \frac{x'}{\bar{M}} \\ \left. + \exp 2\pi i \left( \frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2\pi i \frac{x'}{\bar{M}} \left( \frac{\bar{M}}{2} + 1 \right) \right]. \quad (10)$$

Diese Funktion ist periodisch im Intervall  $0 \leq x' < \bar{M}$ . Diesem Intervall entspricht aber auf der Gittergeraden des rezG die gleiche Länge, die oben vom Intervall  $0 \leq x < 3$  eingenommen wurde. Denn mit der Vergrößerung der Längeneinheit der c-Achse der Elementarzelle im Kristallgitter von 3 auf  $\bar{M}$  Atomlagen verkleinert sich gleichzeitig die entsprechende Längeneinheit des rezG auf den  $3/\bar{M}$ ten Teil. Setzt man also die Relation  $x' = \bar{M} x/3 = 2 M x$  in (10) ein und geht über zu  $S^2$ , so kommt zunächst für das Quadrat des Ausdrucks in der geschweiften Klammer (vgl. z. B. v. Laue<sup>9)</sup> a. a. O.):

$$\left\{ \sum_{\nu=0}^{M-1} \exp 2 \pi i \nu x \right\}^2 = \frac{\sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x/3}, \quad (11)$$

d. h. dieser Term wird nach (2) gleich dem Gitterfaktor  $G^2(x, M)$ , der im Inkohärenzfall auftrat, und es ergibt sich eine formale Parallelität zwischen der Strukturfaktorensumme des Inkohärenzfalls einerseits und dem Quadrat des in eckige Klammern gesetzten Terms von (10) andererseits, weswegen wir diesen im folgenden „Pseudostrukturfaktor“  $P^2(x, M)$  nennen wollen. Dieser Faktor wird also beim Übergang von  $x'$  nach  $x$  und unter Vertauschung einiger Glieder:

$$\begin{aligned} P^2(x, M) = & \left[ 1 + \exp 2 \pi i \left( \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2 \pi i \frac{x}{3} \right. \\ & + \exp 2 \pi i \left( \frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2 \pi i \frac{x}{3} 2 \\ & + \exp 2 \pi i \frac{x}{3} 3 M \\ & + \exp 2 \pi i \left( \frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2 \pi i \frac{x}{3} (3 M + 1) \\ & \left. + \exp 2 \pi i \left( \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 \right) \cdot \exp 2 \pi i \frac{x}{3} (3 M + 2) \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Nach einigen elementaren, aber etwas umständlichen trigonometrischen Umformungen erhält man aus (12) für die einzelnen Gittergeraden des rezG verschiedene Ausdrücke für  $P^2(x, M)$ :

für die Gerade mit (00x):

$$\begin{aligned} P^2(x, M) = & 6 + 2 \left\{ 4 \cos 2 \pi \frac{x}{3} + 2 \cos 2 \pi \frac{2}{3} x \right. \\ & + \cos 2 \pi \frac{x}{3} (3 M - 2) + 2 \cos 2 \pi \frac{x}{3} (3 M - 1) \\ & + 3 \cos 2 \pi \frac{x}{3} 3 M + 2 \cos 2 \pi \frac{x}{3} (3 M + 1) \\ & \left. + \cos 2 \pi \frac{x}{3} (3 M + 2) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

für die Gerade mit (10 x):

$$\begin{aligned} P^2(x, M) = & 4 \left\{ \cos^2 \pi x M + \cos^2 \pi x M \cdot \cos^2 \pi \frac{x}{3} + 3 \sin^2 \pi x M \cdot \sin^2 \pi \frac{x}{3} \right. \\ & + 3 \sin \pi x M \cdot \sin \pi \frac{x}{3} [\sin (M + 1) \pi x - \sin (M - 1) \pi x] \\ & \left. - \cos \pi x M \cdot \cos \pi \frac{x}{3} [\cos (M - 1) \pi x + \cos (M + 1) \pi x] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ferner ergibt sich aus (12) für die Gerade mit (01x), daß immer gilt

$$P^2_{(01x)}(x, M) = P^2_{(10x)}(-x, M). \quad (15)$$

Mit Hilfe der gefundenen Formeln für  $\Sigma_{ik}^2$  und  $\Sigma_k^2$  wurden die Kurvenzüge im sich periodisch wiederholenden Intervall  $0 \leq x < 3$  für verschiedene Werte von  $M$  berechnet. Abb. 4 zeigt jeweils beide Kurven für die Intensitäts-

verteilung längs der Geraden mit  $(10x)$  mit den Parameterwerten  $M = 1$  und  $M = 6$ . Man sieht deutlich, daß schon für  $M = 6$  der Unterschied zwischen beiden Darstellungen relativ zur Intensität im Maximum kaum noch nennenswert, auf der Photoplatte sicher nicht mehr nachweisbar ist, zumal ja auf dem Präparatsträger immer eine Anzahl von Kristalliten gleichzeitig vom Elektronenstrahl erfaßt wird, deren Dicke — also deren  $M$  — innerhalb eines gewissen Bereiches streut; es kommt also zu einer Vermischung der feinen Unterschiede der Nebenmaxima.

Bemerkenswert erscheint mir, daß die Unterschiede nicht über den Punkten der Abszissenachse auftreten, die den Intensitätsmaximis unendlich ausgedehnter Gitter entsprechen.

Diese Regel ist für die Gittergeraden mit  $(10x)$  und  $(01x)$  ohne weiteres erfüllt, nicht jedoch für diejenige mit  $(00x)$ , wo die aus den Formeln für den Kohärenz- und den Inkohärenzfall sich ergebenden Werte in  $x = 0, x = 3$  usw. zueinander im Verhältnis 2:1 stehen. Dies liegt an der Eigentümlichkeit der Theorie, zwei Gittern mit  $M_1$  und  $M_2$  Atomlagen Intensitätsmaxima zuzuordnen, deren numerische Werte zueinander im Verhältnis  $M_1^2:M_2^2$  stehen. So kommt es, daß im Inkohärenzfall durch Addition ein Maximumwert von  $2(\bar{M}/2)^2$  entsteht, während im Kohärenzfall, wo mit einem

einheitlichen Kristall von  $\bar{M}$  Atomlagen gerechnet wird, ein Maximumwert von  $\bar{M}^2$  resultiert. Da es hier um die Relationen zwischen den Intensitätswerten an verschiedenen Punkten der Gittergeraden geht, erscheint es gerechtfertigt, im Falle  $(00x)$  durch geeignete Normierung die Maxima beider Kurven einander anzugleichen. — Die Schwierigkeit tritt im Falle der beiden anderen Gittergeraden nicht auf, weil hier die Maxima von I und II an verschiedenen Punkten liegen.

#### IV.

Wir sahen, daß die Unterschiede zwischen kohärenter und inkohärenter Darstellungsart mit wachsendem  $M$  immer geringer werden. Diese Erkenntnis läßt sich natürlich durch Ausrechnung für eine größere Anzahl von  $M$ -Werten immer weiter erhärten. Doch ist dieses Verfahren insbesondere für höhere

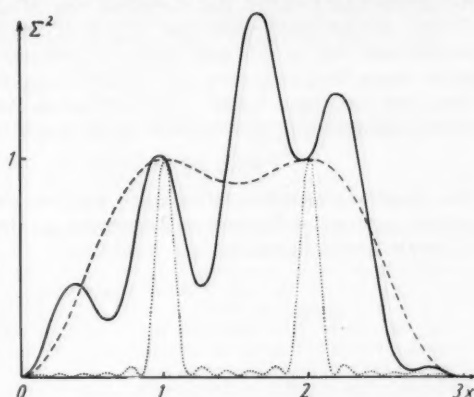


Abb. 4a.  $\Sigma_{ik}^2$  (gestrichelt) und  $\Sigma_k^2$  (ausgezogen) für Gittergerade des rezG  $(10x)$  und  $M = 1$  sowie  $\Sigma_{ik}^2$  (punktiert) für gleiche Gerade und  $M = 6$ . Alle Kurven normiert auf gleiche Höhe für  $x = 1$  und  $x = 2$ , Intensitätswerte in relativen Einheiten

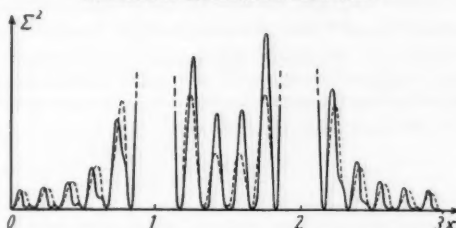


Abb. 4b.  $\Sigma_{ik}^2$  (gestrichelt) und  $\Sigma_k^2$  (ausgezogen) für Gittergerade des rezG  $(10x)$  und  $M = 6$ , zehnfach überhöht gegenüber Abb. 4a

Schichtzahlen recht mühsam, da wegen der zunehmenden Oszillation der Kurven immer mehr Zwischenpunkte berechnet werden müssen, und es bringt keine allgemeingültige quantitative Aussage über die Abhängigkeit der beiden Darstellungen von  $M$ . Es wurde daher nach einem geeignet definierten Abweichungsmaß gesucht, das nur noch von  $M$  abhängig sein sollte.

Die Intensitätsverteilungen  $\Sigma_{ik}^2(x, M)$  und  $\Sigma_k^2(x, M)$  sind periodische Funktionen von  $x$  mit dem Periodizitätsintervall  $0 \leq x < n$ . Wir können daher einen Vergleich über den Gesamtverlauf beider Funktionen anstellen, wenn wir nur ihren Verlauf innerhalb eines Periodizitätsintervalls verfolgen, etwa innerhalb  $0 \leq x < n$ . Wir bilden zunächst die Differenz

$$\Phi(x, M) = \Sigma_{ik}^2(x, M) - \Sigma_k^2(x, M). \quad (16)$$

Das Quadrat dieses  $\Phi(x, M)$  können wir über eine Periodenlänge nach  $x$  integrieren, und wir definieren in Anlehnung an die Methode der kleinsten Quadrate als Abweichungsmaß die Funktion

$$F(M) = \frac{1}{M^4} \frac{\int_0^n \Phi^2(x, M) dx}{\int_0^n dx} = \frac{1}{n} \frac{1}{M^4} \int_0^n \Phi^2(x, M) dx \quad (17)$$

oder

$$F(M) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{M^4} \int_0^{2\pi} \Phi^2(u, M) du, \quad (18)$$

wenn wir von  $x$  übergehen zur Variablen  $u = x(2\pi/n)$  mit  $0 \leq u < 2\pi$ . — Der Faktor  $1/M^4$  dient zur Normierung, da  $\Sigma_k^2$  und  $\Sigma_{ik}^2$  Maxima vom Wert  $\bar{M}^2$  aufweisen,  $\Phi^2$  also proportional  $\bar{M}^4$  bzw.  $M^4$  ist.

Für den Spezialfall des flächenzentriert-kubischen Gitters erhält man als  $\Phi^2(u, M)$  nach einigen Umformungen und unter Vernachlässigung konstanter Zahlenfaktoren für die einzelnen Gittergeraden des rezG verschiedene Ausdrücke:

für die Gerade mit (00x):

$$\Phi^2(u, \bar{M}) = \frac{\sin^8(u \bar{M}/2)}{\sin^4 3u} (1 + 8 \cos 2u \cdot \cos^2 u)^2, \quad (19)$$

für die Gerade mit (10x):

$$\Phi^2(u, \bar{M}) = \frac{\sin^4(u \bar{M}/2)}{\sin^2 3u} \sin^2 u \cdot \cos^2 \left\{ u \left( \bar{M} + \frac{2}{6\bar{M}} \right) \right\}. \quad (20)$$

Man beachte, daß diese Funktionen verschwinden für die Maxima wie für die Minima der auf beiderlei Art gerechneten Intensitätsverteilungsfunktionen, die übrigens auch ihrerseits in der Lage ihrer Nullstellen übereinstimmen. — Die bestimmten Integrale, die sich durch Einsetzen dieser  $\Phi^2$  in (18) ergeben, können mit Hilfe des Residuensatzes gelöst werden (s. z. B. Whittaker u. Watson<sup>10</sup>), S. 112f.). Man führt dazu eine neue Variable  $z = \exp i x$  ein, wobei der Integrationsweg in den Einheitskreis auf der komplexen Zahlenebene übergeht. Im Falle des flächenzentriert-kubischen Gitters erhält man schließlich für die Gerade mit (10 x):

$$F(M)_{(10x)} = \frac{1}{24} \frac{1}{\bar{M}^2}. \quad (21)$$

<sup>10</sup>) E. T. Whittaker u. G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th Ed., Cambridge 1950.

Diese Abhängigkeit des Abweichungsmaßes von  $M^{-3}$  bedeutet praktisch, wenn man einen Intensitätsempfindlichkeitsspielraum der Photoplatte von zwei Zehnerpotenzen zugrunde legt, daß eine Berücksichtigung der Kohärenz nur bei extrem dünnen Schichten ( $M \leq 5$ ) notwendig ist.

Freilich scheinen die Verhältnisse für die Gerade mit (00z) weniger günstig zu liegen. Hier tritt neben dem  $M^{-3}$ -Glieder noch ein  $M^{-1}$ -Glieder auf. (Ersetzt man  $\Phi^2_{(00z)}$  durch

$$\bar{\Phi}^2_{(00z)} = \frac{\sin^4(u \bar{M})}{\sin^4 3u}, \quad (22)$$

das bis auf den Zahlenfaktor  $9^2 = 81$  eine Majorante von  $\Phi^2$  darstellt, so erhält man für  $M \equiv 0 \pmod{3}$

$$\bar{F}(M) = \frac{1}{M^4} \int_0^{2\pi} \bar{\Phi}^2(u, M) du = \frac{1}{72} \left( \frac{4}{M} + \frac{5}{M^3} \right). \quad (23)$$

Es ist aber zu berücksichtigen, daß auf der (10z)-Geraden für kleine  $M$  Unterschiede in der Lage der Maxima auftraten (vgl. Abb. 4,  $M = 1$ ), was auf der (00z)-Geraden für kein  $M$  vorkommt, denn (5) und (13) enthalten nur cos-Glieder mit relativ zu den Maxima symmetrischem Verlauf. Der Unterschied beider Berechnungsarten für die (00z)-Gerade liegt somit vor allem im Auftreten der  $M$ ten Oberwelle und einiger Wellen mit benachbarten Frequenzen im Pseudostrukturfaktor  $P^2$  und damit in verschiedener Halbwertsbreite der Maxima, deren Lage gegenüber den Verhältnissen beim allseitig unendlich weit ausgedehnten Kristall nicht verändert wird. Der langsamere Abfall des Abweichungsmaßes mit  $M^{-1}$  ist daher bei der (00z)-Geraden längst nicht so kritisch, wie er es bei der (10z)-Geraden wäre. Man wird also auch hier schon von recht dünnen Schichten an aufwärts auf eine Berücksichtigung der Kohärenz verzichten können.

An dieser Abschätzungsmethode könnte bedenklich erscheinen, daß ja grundsätzlich das Kleinwerden der Fläche zwischen zwei Kurvenzügen nicht ausschließt, daß bei sonst weitgehender Annäherung an einigen wenigen Stellen starke Abweichungen geringer Halbwertsbreite eintreten können. Dagegen spricht hier aber die Beschränktheit und Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen, aus denen sich die Zähler der  $\Phi^2$  zusammensetzen. Die einzigen Stellen, an denen die  $\Phi^2$  große Werte annehmen könnten, sind die Umgebungen der Nullstellen des Nenners. An diesen Stellen werden aber die  $\Phi^2$  selbst gleich 0.

## V.

Eine Anwendung der hier skizzierten Methode der „Mammutelementarzelle“ auch auf kompliziertere Gitter dürfte keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereiten. Die dann auftretenden Abweichungsfunktionen zwischen den Intensitätsverteilungen im Kohärenz- und Inkohärenzfall wird man mittels eines der folgenden Integrale nach der Majorantenmethode abschätzen können (vgl. auch (23)), soweit nicht eine explizite Ausrechnung in Frage kommt:

$$\frac{1}{N^4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 N x dx}{\sin^2 x} = \frac{2\pi}{N^3} \quad (24)$$

$$\frac{1}{N^4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 N x dx}{\sin^4 x} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{2}{N} + \frac{1}{N^3} \right) \quad (25)$$

$$\frac{1}{N^4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 N x dx}{\sin^2 x} = \frac{2\pi}{2N^3}. \quad (26)$$

Grundsätzliche Schwierigkeiten bei der Abweichungsabschätzung bereitet allerdings die Verallgemeinerung auf den Fall, daß die Komponenten I und II verschieden dick sind, weil dann kein einheitlicher Gitterfaktor auftritt. Dieser Fall ist aber nur interessant, wenn die Dicke von I und II noch einigermaßen vergleichbar ist, weil andernfalls eine Komponente intensitätsmäßig vollkommen überwiegen würde. Sind aber I und II nicht allzu verschieden, so wird die Rechnung mit dem symmetrischen Modell eine gute Näherung darstellen.

Als Ergebnis der Überlegungen läßt sich also feststellen, daß eine Berücksichtigung des Kohärenzverhaltens bei Zwillingbildung nur dann notwendig ist, wenn man es mit extrem dünnen Schichten von der Dicke weniger Elementarzellenhöhen zu tun hat. Oberhalb dieser Dicke von größenordnungsmäßig etwa 30 bis 40 Å darf man also, soweit nicht die dynamische Theorie herangezogen werden muß, in üblicher Weise auf der Grundlage der Laueschen Interferenzbedingungen die Beugungsdiagramme der beteiligten Komponenten berechnen und additiv zum Beugungsdiagramm der Zwillinge zusammenfügen.

Unterhalb dieser Grenze aber ist die auf der Gittervorstellung basierende Theorie ohnehin nur mit Vorsicht anzuwenden, wie die Arbeiten von Boersch<sup>11)</sup> König<sup>12)</sup>, Germer und White<sup>13)</sup> sowie Berry<sup>14)</sup> gezeigt haben, in denen die Verfasser die Interferenzdiagramme kleiner und kleinster Kristallite verschiedener Gestalt auf der Grundlage der Debyeschen Gasinterferenzmethode<sup>15)</sup> berechnet haben, wobei sich teilweise beachtliche Abweichungen gegenüber den Voraussagen der geometrischen Theorie ergaben.

Im allgemeinen wird man im Realkristall nicht die hier zugrunde gelegte Struktur von Lamellen finden, die nach zwei Richtungen hin sehr weit ausgegedehnt sind. Die Berechnungen sind aber auch auf diesen Fall übertragbar, da die Intensitätsverteilung für die einzelnen Gittergeraden des rezG immer nur von der Ausdehnung des Kristallgitters jeweils in Richtung dieser Gittergeraden abhängt.

<sup>11)</sup> H. Boersch, Z. Physik **119**, 54 (1942).

<sup>12)</sup> H. König, Optik **3**, 201 (1948).

<sup>13)</sup> H. L. Germer u. A. H. White, Physic. Rev. **60**, 447 (1941).

<sup>14)</sup> Ch. R. Berry, Physic. Rev. **88**, 596 (1952).

<sup>15)</sup> P. Debye, Ann. Physik (4) **40**, 809 (1915).

Köln, I. Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Mai 1954.



## Magnetische Pulvermuster auf Martensit

Von Wilfried Andrä

Mit 8 Abbildungen

Die Methode der Bitterschen Streifen ist seit einer Reihe von Jahren zu einem der wichtigsten Hilfsmittel geworden bei der Klärung von grundsätzlichen Fragen des Ferromagnetismus<sup>1)</sup>.

Wir haben bei der Anwendung der Methode auf martensitischem Stahl interessante Muster gefunden, die für den Problemkreis der martensitischen Umwandlungen von Bedeutung sein können. Als Probenmaterial wurde Stahl der ungefähren Zusammensetzung 1,4% C; 0,4% Mn; 1,7% Cr; 0,2% V; 0,3% Si; Rest Fe verwendet, in dem sich nach geeigneter Wärmevorbehandlung vereinzelte große Martensitnadeln innerhalb von Restaustenit gebildet hatten. Danach wurde die Probe angelassen und anschließend durch Tiefkühlung nochmals Martensit erzeugt, so daß tetragonaler und angelassener Martensit nebeneinander vorhanden waren. Ein Schliffbild des Materials zeigt Abb. 1. Die Härteeindrücke dienen zur Markierung. In Abb. 2 ist die gleiche Fläche abgebildet, nachdem nochmals sorgfältig poliert worden war.

Bringt man auf die so vorbereitete Probe einige Tropfen einer  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ -Suspension, dann wird auch ohne Ätzen das Gefüge sichtbar, da sich über dem magnetischen Martensit eine stärkere Konzentration der Suspension einstellt als über dem unmagnetischen Restaustenit (Abb. 3). Wird ein Magnetfeld in der Größenordnung von 200 Oe senkrecht zur Probenoberfläche angelegt, so zeigen sich auf



Abb. 1. Tetragonaler und angelassener Martensit inmitten von Restaustenit auf Stahl; mit Salpetersäure geätzt. Die Härteeindrücke dienen zur Markierung,  $V \approx 430$

<sup>1)</sup> Siehe z. B.: H. J. Williams, R. M. Bozorth u. W. Shockley, *Physic. Rev.* **75**, 155 (1949); R. M. Bozorth, *J. Physique Radium* **12**, 308 (1951); L. F. Bates, *Rev. Métallurg.* **49**, 185 (1952); B. Elschner, *Ann. Physik* **13**, 290 (1953).



Abb. 2. Dieselbe Stelle der Probenoberfläche wie in Abb. 1, jedoch nochmals mechanisch poliert



Abb. 3. Wie Abb. 2; mit einer  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ -Suspension bedeckt. (Durch das Zwischenpolieren hat sich die Form der Nadeln gegenüber der Abb. 1 etwas geändert)

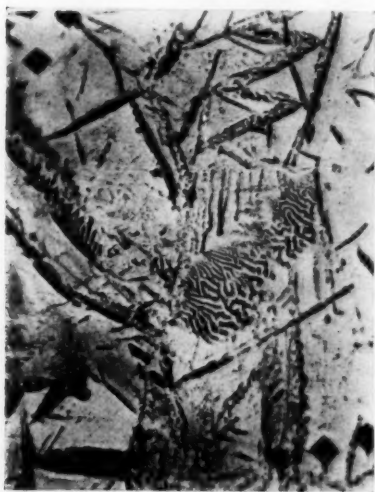


Abb. 4. Wie Abb. 3; ein Magnetfeld der Größenordnung von 200 Oe ist senkrecht zur Oberfläche angelegt



Abb. 5. Wie Abb. 4; Magnetfeld umgepolt

dem Martensit eigenartige Muster (Abb. 4). Beim Umpolen des Magnetfeldes vertauschen die hellen und dunklen Streifen ihre Lage (Abb. 5).

Dieser Effekt, der in den Abb. 6—8 ebenfalls deutlich zu sehen ist, sowie die Form der Muster erinnern an die sogenannten Labyrinthmuster, die auf mechanisch poliertem Siliciumeisen beobachtet werden können<sup>2)</sup>. Ihre typische Form wird hierbei Spannungen zugeschrieben, die infolge des Schleifens und Polierens in der Oberfläche entstehen. Die Labyrinthfiguren auf Siliciumeisen verschwinden nach einwandfreiem elektrolytischem Polieren, da dann die verspannte Schicht abgetragen worden ist. Der Charakter der Muster auf dem Martensit bleibt hingegen nach mechanischem und nach elektrolytischem Polieren der gleiche. Es kann daher angenommen werden, daß diese Muster durch magnetische Anisotropie im Inneren bestimmt sind, die im Martensit bei der Umwandlung entsteht und die sich natürlich nicht durch Abtragen einer Oberflächenschicht beseitigen läßt.

Wie sich aus dem Verhalten der Muster auf Martensit bei Veränderungen des angelegten Magnetfeldes erkennen läßt, werden in diesem Fall keine Blochwände sichtbar gemacht. Es handelt sich vielmehr um eigen-



Abb. 6. Martensitnadeln auf sorgfältig mechanisch und elektrolytisch poliertem Stahl, mit einer  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ -Suspension sichtbar gemacht.  $V \approx 450$

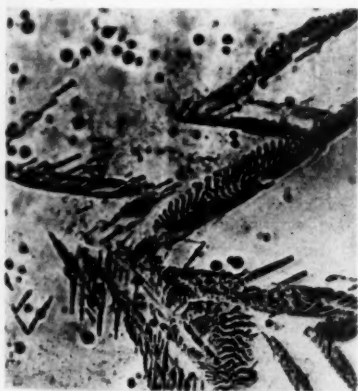


Abb. 7. Wie Abb. 6; Magnetfeld senkrecht zur Oberfläche

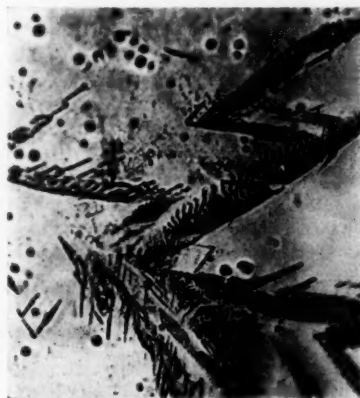


Abb. 8. Wie Abb. 7; Magnetfeld umgepolt

<sup>2)</sup> Siehe z. B.: L. W. McKeehan u. W. C. Elmore, *Physic. Rev.* **46**, 226 (1934).

tümlich angeordnete Gebiete mit starker magnetischer Oberflächenladung. Da sehr ähnliche Muster auch bei Kobalt beobachtet werden konnten, liegt es nahe, dem Martensit ebenfalls eine einzige Richtung leichtester Magnetisierbarkeit und eine hohe Anisotropieenergie zuzuschreiben, wie Néel<sup>3)</sup> in anderem Zusammenhang bereits ausgeführt hat.

Weitere experimentelle Untersuchungen sowie Abschätzungen zur quantitativen Deutung werden z. Z. durchgeführt.

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie  
der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 17. April 1954.

---

<sup>3)</sup> L. Néel, J. Physique Radium **12**, 339 (1951).

# Über die Phasenschwingungen beim Synchrotron mit starker Fokussierung

(Eine Untersuchung mit Hilfe einer mechanischen Analogiemaschine)

Von E. Bodenstedt

Mit 17 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Die Untersuchung zeigt, daß die mit der kritischen Energie verbundenen Erscheinungen keineswegs zu unüberwindlichen Schwierigkeiten führen. Es ist durchaus möglich, in der Beschleunigung von Teilchen durch die singuläre Stelle hindurchzukommen, ohne den Strahl zu verlieren, wenn man geeignete Eingriffe vornimmt. Es wird eine Anzahl solcher Maßnahmen näher diskutiert, und gezeigt, daß durchaus ausreichende Toleranzen für die technische Verwirklichung vorhanden sind.

## Einführung

Während beim normalen Synchrotron automatisch eine Stabilisierung der Phasenlage der Teilchen bezüglich der am Beschleunigungsspalt anliegenden Wechselspannung vorhanden ist, treten bekanntlich beim Synchrotron mit starker Fokussierung<sup>1)</sup> Schwierigkeiten auf, wenn man die Teilchen über die sogenannte kritische Energie hinweg beschleunigen muß.

Im folgenden werden die eigentümlichen Verhältnisse in der Umgebung der kritischen Energie mit Hilfe einer mechanischen Analogiemaschine eingehend untersucht; insbesondere wurden die Möglichkeiten diskutiert, die kritische Energie durch äußere Eingriffe zu überwinden. Es gelang, allgemeingültige und von speziellen Synchrotronparametern unabhängige Aussagen darüber zu gewinnen, welche Amplitudenänderungen der Phasenschwingungen beim Durchgang durch die kritische Energie zu erwarten sind, und welche technischen Toleranzen man bei den diskutierten Eingriffen einzuhalten hat.

### 1. Über die der Untersuchung zugrunde liegende Differentialgleichung und ihren Gültigkeitsbereich

D. Bohm und L. Foldy gaben eine Differentialgleichung für die Phasenschwingungen beim normalen Synchrotron an<sup>2)</sup>. Die folgende anschauliche und

<sup>1)</sup> E. D. Courant, M. St. Livingstone and H. S. Snyder: The strong-focusing Synchrotron - A new high Energy-Accelerator, *Physic. Rev.* **88**, 1190 (1952).

<sup>2)</sup> D. Bohm and L. Foldy, The Theory of the Synchrotron, *Physic. Rev.* **70**, 249 (1946).

sich auf die wesentlichen Glieder<sup>3)</sup> beschränkende Herleitung läßt erkennen, wie die Gleichung auf den Fall der starken Fokussierung zu übertragen ist, und welche Vernachlässigungen hier den Gültigkeitsbereich einengen.

Bekanntlich ist die Phasenschwingung ursächlich mit einer Energieschwingung verknüpft.

Die Phase  $\Phi$  eines Teilchens (Definition siehe Abb. 1) bestimmt die Änderung der Amplitude der Energieschwingung pro Umlauf  $\Delta(E)$  ( $\Delta E =$

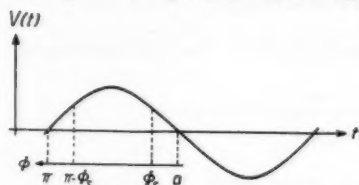


Abb. 1. Zur Definition der Phase.  $V(t) =$  Beschleunigungsspannung;  $\Phi =$  Phase der Teilchen, definiert durch den Zeitpunkt, in dem sie den Beschleunigungsspalt passieren;  $\Phi_s =$  Gleichgewichtsphase (synchrone Phase), das Teilchen dieser Phase (synchrone Teilchen) erfährt pro Umlauf gerade den erforderlichen, durch die zeitliche Zunahme des Führungsfeldes und die Strahlungsverluste vorgegebenen Energiebetrag

$E - E_s =$  Amplitude der Energieschwingung = Abweichung der Energie von der des synchronen Teilchens):

$$\Delta(E) = e \cdot V \cdot (\sin \Phi - \sin \Phi_s)^4. \quad (1)$$

Die Amplitude der Energieschwingung bestimmt aber rückwirkend die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit von der des synchronen Teilchens<sup>5)</sup> und damit die Änderungsgeschwindigkeit der Phase:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_s} = \frac{\dot{\Phi}}{\omega_s} = -K \cdot \frac{\Delta E}{E_s}. \quad (2)$$

Diese von D. Bohm und L. Foldy verwandte Gleichung ist allerdings nur eine Näherung, da es sich um eine Taylorentwicklung handelt, die nach dem ersten Glied abgebrochen wurde. Exakt gilt natürlich:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -K \cdot \frac{dE}{E}. \quad (2a)$$

Die Vernachlässigung ist im Falle des normalen Synchrotrons ganz unwesentlich, weil sich  $K$  nur langsam mit der Energie ändert, so daß die durch die Ableitungen von  $K$  bestimmten Koeffizienten der Glieder höherer Ordnung klein bleiben; im Falle der starken Fokussierung macht sie sich jedoch in der unmittelbaren Umgebung der kritischen Energie (Vorzeichenwechsel von  $K$ ) unter Umständen bemerkbar, wie am Ende dieses Abschnitts ausführlich gezeigt wird.

Die Gl. (1) und (2) beschreiben den physikalischen Vorgang der Phasenschwingung anschaulich und vollständig. Durch Elimination von  $\Delta E$  gewinnt man unmittelbar die Phasenschwingungsgleichung von D. Bohm und L. Foldy:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{\omega_s^2 K} \cdot \dot{\Phi} \right) + \frac{eV}{2\pi} (\sin \Phi - \sin \Phi_s) = 0. \quad (3)$$

<sup>3)</sup> Die Radialabhängigkeit der Ausstrahlung der auf einem Kreise umlaufenden Teilchen führt zu einem von D. Bohm und L. Foldy angegebenen unwesentlichen Dämpfungsglied, das hier vernachlässigt wurde.

<sup>4)</sup> Das Teilchen der Phase  $\Phi$  gewinnt nämlich pro Umlauf den Energiebetrag  $e \cdot V \cdot \sin \Phi$ , das synchrone Teilchen dagegen den Energiebetrag  $e \cdot V \cdot \sin \Phi_s$ .

<sup>5)</sup> Der Momentanwert der Energie  $E$  bestimmt nämlich die Winkelgeschwindigkeit eindeutig; denn  $\omega = \frac{v}{r}$ ,  $E$  legt unmittelbar die Bahngeschwindigkeit  $v$  fest und über das Führungsfeld auch den Radius  $r$ .



Allgemein lautet der Ausdruck für  $K$ :

$$K = 1 + (\alpha - 1) \cdot \frac{c^2}{v_s^2}, \quad (4)$$

wo  $\alpha$  eine, im allgemeinen von der Energie unabhängige Apparatekonstante ist, die angibt, um welchen Betrag sich ein Teilchen radial vom Sollkreis entfernt, wenn sein Impuls von dem des synchronen Teilchens  $p_s$  um  $\Delta p$  abweicht:

$$\frac{\Delta r}{r_s} = \alpha \cdot \frac{\Delta p^6}{p_s} \quad (4a)$$

Wenn  $\alpha > 1$  ist, dann behält  $K$  während der ganzen Beschleunigung sein Vorzeichen. Insbesondere ist beim normalen Synchrotron immer  $\alpha > 1$  (es ist nämlich hier  $\alpha = 1/1 - n$  mit  $0 < n < 1$ )<sup>7)</sup>. Wenn dagegen  $\alpha < 1$  ist, dann wechselt  $K$  sein Vorzeichen, wie unmittelbar aus Gl. (4) folgt, bei der Energie:

$$E_{\text{krit}} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha}}, \quad \text{wo } E_0 = \text{Ruhenergie.} \quad (5)$$

Insbesondere ist beim A.G.-Synchrotron (Synchrotron mit Fokussierung durch Sektorfelder mit alternierendem Feldgradienten)<sup>1)</sup> immer  $\alpha < 1$  (es ist nämlich hier  $\alpha = 4,85/n$  in asymptotischer Näherung für große  $n$ , d. h. etwa für  $n > 100$ )<sup>7)</sup>.

Es sei in dieser Arbeit „Starke Fokussierung“ definiert durch  $\alpha < 1$  und „Schwache Fokussierung“ durch  $\alpha > 1$ ; physikalisch bedeutet „Starke Fokussierung“ in diesem Sinne entsprechend Gl. (4a), daß große Impulsschwankungen, was gleichbedeutend ist mit großen Energieschwankungen, mit nur kleinen Radialbewegungen verbunden sind.

Da  $K$  in der Phasenschwingungsgleichung im Nenner auftritt, führt sein Vorzeichenwechsel zu einer unangenehmen Singularität. Der Term:

$$\Theta(t) = \frac{E_s}{\omega_s^2 \cdot K}$$

bekommt an der Stelle der kritischen Energie einen mathematischen Pol. In Abb. 2 ist die Funktion  $\Theta(t)$  graphisch dargestellt unter der Voraussetzung einer linearen Zunahme der Energie des synchronen Teilchens mit der Zeit:

$$E_s = E_{\text{krit}} (1 + k \cdot t). \quad (6)$$

Die Zeittransformation:

$$\tau = k \cdot t$$

führt zu einem invarianten Zeitmaßstab, der in der folgenden Untersuchung beibehalten wurde. Beachtenswert ist das Minimum an der Stelle  $\tau = \sqrt{3} - 1$ .

Es wurde oben erwähnt, daß die Phasenschwingungsgleichung von Bohm und Foldy nur eine Näherung ist. Sie ist im Falle des normalen Synchrotrons besonders gut und

<sup>6)</sup> Aus:  $E = m c^2 = \frac{p c^2}{v} = \frac{p \cdot c^2}{r \cdot \omega}$  folgt nämlich durch Differentiation:  $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta \omega}{\omega}$ , oder mit  $\frac{\Delta r}{r} = \alpha \cdot \frac{\Delta p}{p}$ :  $\frac{\Delta \omega}{\omega} = (1 - \alpha) \cdot \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta E}{E}$  und unter Verwendung der relativistischen Gleichung  $\Delta E = v_s \cdot \Delta p$ :  $\frac{\Delta \omega}{\omega} = - \left\{ 1 + (\alpha - 1) \cdot \frac{c^2}{v_s^2} \right\} \cdot \frac{\Delta E}{E}$ .

<sup>7)</sup>  $n$  = Exponent der radialen Feldänderung:  $B \approx r^{-n}$ .

beschreibt auch im Falle des Protonensynchrotrons mit A.G.-Fokussierung selbst die unmittelbare Umgebung der kritischen Energie noch hinreichend genau, sie gibt dagegen im Falle des Elektronensynchrotrons mit A.G.-Fokussierung bei großen Amplituden und tiefer kritischer Energie die Umgebung der kritischen Energie nicht mehr ganz richtig wieder. Exakter hat man an der Stelle von (2) die Gl. (2a) zu verwenden und gewinnt durch Integration:

$$\Delta\omega = \dot{\Phi} = - \int_{E_s}^{E_s + \Delta E} \frac{K(E) \cdot \omega}{E} \cdot dE. \quad (2b)$$

Die Elimination der Energie, die zur Phasenschwingungsgleichung führt, macht jetzt Schwierigkeiten. Dagegen ist es ohne weiteres möglich, die Phase zu eliminieren, wenn man sich auf kleine Phasenamplituden beschränkt, was in der unmittelbaren Umgebung der kritischen Energie zulässig ist. Man kommt dann zu der Differentialgleichung der mit der Phasenschwingung gekoppelten Energieschwingung.

Unter Verwendung der Taylorentwicklung:

$$\sin \Phi = \sin \Phi_s + \cos \Phi_s (\Phi - \Phi_s)$$

läßt sich nämlich Gl. (1) umformen zu:

$$\frac{d}{dt} (\Delta E) = \frac{\omega \cdot e \cdot V \cdot \cos \Phi_s}{2\pi} (\Phi - \Phi_s),$$

da:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , wo  $T$  = Umlaufszeit.

Man differenziert, um  $\Phi$  eliminieren zu können, einmal nach der Zeit:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\Delta E) = \frac{\omega \cdot e \cdot V \cdot \cos \Phi_s}{2\pi} \cdot \dot{\Phi}. \quad (1a)$$

Die Zeitabhängigkeit von  $\omega$  und  $\Phi_s$  wurde hier vernachlässigt. Nun ist die Elimination von  $\dot{\Phi}$  aus (1a) und (2a) möglich, und man erhält:

$$\Delta \dot{E} + \frac{e \cdot \omega^2 \cdot V \cdot \cos \Phi_s}{2\pi} \cdot \int_{E_s}^{E_s + \Delta E} \frac{K(E) \cdot \omega}{E} \cdot dE = 0.$$

Unter Voraussetzung eines linearen Anstiegs der synchronen Energie mit der Zeit (6) kann man die Integration explizit durchführen und erhält, wenn man die synchrone Energie an Stelle der Zeit als unabhängige Variable einführt, unter Beachtung von Gl. (4) die folgende Differentialgleichung der Energieschwingung:

$$\frac{d^2 \xi}{d\eta^2} + \frac{e \omega^2 \cdot V \cdot \cos \Phi_s}{2\pi k \cdot \epsilon_{krit}^2} \left\{ \ln \frac{\xi + \eta}{\xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_{krit}^2} - 1 \right) \cdot \ln \frac{(\xi + \eta)^2 - 1}{\xi^2 - 1} \right\} = 0,$$

wo:

$\xi$  = Energieamplitude  $\Delta E/E_0$   
 $\eta$  = synchrone Energie  $E_s/E_0$   
 $\epsilon_{krit}$  = kritische Energie  $E_{krit}/E_0$ .

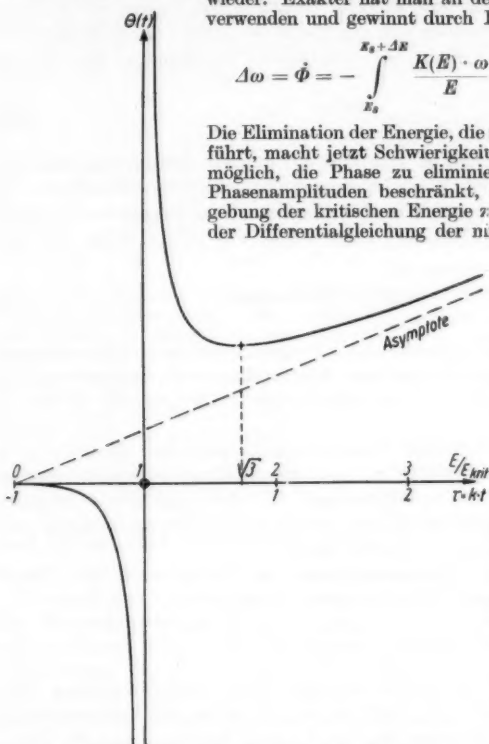


Abb. 2. Die Funktion:  $\Theta(t) = E_s/\omega_s^2 K$ . Zugrunde liegt ein linearer Anstieg der Energie des synchronen Teilchens mit der Zeit:  $E_s = E_{krit} (1 + kt)$

Interessant ist der Ort des Vorzeichenwechsels der Direktionskraft in der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene. Diese Ortslinien mit dem Scharparameter  $\varepsilon_{\text{krit}}$  wurden errechnet und in Abb. 3 dargestellt. Die Ortslinien haben bei kleinem  $\xi$  einen Anstieg von ungefähr zwei. Das bedeutet insbesondere, daß ein Teilchen die kritische Stelle des Vorzeichenwechsels der Direktionskraft nicht dann erreicht, wenn  $E_s = E_{\text{krit}}$  (definiert durch Gl. (5)), oder dann, wenn seine tatsächliche Momentanenergie  $E = E_{\text{krit}}$ , sondern dann, wenn  $E_{\text{krit}}$  gerade in der Mitte zwischen der tatsächlichen und der synchronen Energie liegt.

Das Diagramm ermöglicht folgendes Kriterium für die Gültigkeit der Phasenschwingungsgleichung von Bohm und Foldy in der Umgebung der kritischen Energie:

Notwendig und hinreichend ist

$$\left| \frac{d\xi}{d\eta} \right| < 2 \text{ in der kritischen Zone.}$$

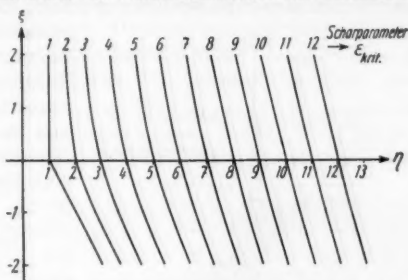


Abb. 3. Die Ortslinien des Vorzeichenwechsels der Direktionskraft in der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene

## 2. Eine mechanische Analogiemaschine zum Studium der Phasenschwingungsgleichung

Die Phasenschwingungen beim normalen Synchrotron und beim Synchrozyklotron wurden mehrfach in der Literatur durch Pendelmodelle veranschaulicht<sup>2)</sup>). In Weiterführung dieses Gedankens wurde eine mechanische Analogiemaschine entwickelt, die exakte Integrationen erlaubt und auch den Fall des Synchrotrons mit starker Fokussierung erfaßt.

Es handelt sich also darum, ein mechanisches System zu finden, dessen Bewegungsgleichung mit der Phasenschwingungsgleichung identisch ist; denn man braucht dann nur den Bewegungsablauf zeitlich zu registrieren, um die Lösungen zu erhalten. Eine nähere Betrachtung der Phasenschwingungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} (\Theta(t) \cdot \dot{\Phi}) + \frac{eV}{2\pi} (\sin \Phi - \sin \Phi_s(t)) = 0$$

zeigt, daß das folgende mechanische System diese Forderungen erfüllt:

Man interpretiert  $\Theta(t)$  als das zeitlich veränderliche Trägheitsmoment eines Drehpendels (mit vertikaler Achse),  $\Phi$  als den Drehwinkel und damit  $\dot{\Phi}$  als die Winkelgeschwindigkeit des Pendels. Das Produkt  $\Theta(t) \cdot \dot{\Phi}$  entspricht dann dem Drehimpuls. Die gesamte Gleichung wird zur mechanischen Bewegungsgleichung des Pendels, wenn man das zweite Glied als ein Drehmoment interpretiert, das auf das Pendel einwirkt. Die Gleichung schreibt also einmal ein Drehmoment vor, das dem Sinus des Ausschlagswinkels proportional ist, nämlich das Moment  $\frac{eV}{2\pi} \sin \Phi$ , und ein zweites, vom Ausschlagwinkel unabhängiges Moment  $-\frac{eV}{2\pi} \sin \Phi_s(t)$ . Die schematische Skizze

<sup>2)</sup> M. Stanley Livingston, Particle Accelerators S. 291, Advances in Electronics Volume I, 1948.

auf Abb. 4 läßt erkennen, wie diese an das mechanische System gestellten Forderungen technisch verwirklicht wurden:

Das Drehpendel hängt an einem Stahldraht von  $\frac{1}{10}$  mm Durchmesser; der Durchmesser ist so klein gewählt, damit die Direktionskraft dieses Auf-

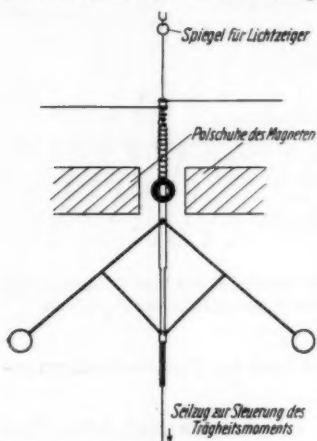


Abb. 4. Schematische Skizze der Anordnung

hängefadens gegenüber den übrigen Drehmomenten vernachlässigt werden kann. Das Trägheitsmoment des Pendels wird durch zwei Bleimassen bestimmt, deren Abstand von der Drehachse variiert werden kann. Bei der gebauten Analogiemaschine wurde eine Änderung um einen Faktor 250 erreicht. Wie aus der schematischen Skizze ersichtlich, läßt sich die zeitliche Änderung des Trägheitsmoments durch einen nach unten in Richtung der Drehachse herausgeführten Seilzug bedienen, auch während das Pendel schwingt, ohne dabei irgendwelche zusätzlichen störenden Drehmomente auf das Pendel auszuüben. Die durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen Drehmomente wurden in folgender Weise hervorgerufen:

Das Moment  $\frac{e}{2\pi} \cdot V \cdot \sin \Phi$  wurde dadurch gewonnen, daß das Pendel mit einer kleinen,

stromdurchflossenen Spule versehen wurde, die sich in einem äußeren horizontalen homogenen Magnetfeld befindet. Das übertragene Moment ist dann:

$$D = M \cdot H \cdot \sin \Phi$$

$D$  = Drehmoment

$M$  = magnetisches Moment der Spule

$H$  = äußeres Magnetfeld.

Man hat also die geforderte Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel, und kann überdies eine eventuelle zeitliche Veränderung der Senderspannung  $V = V(t)$  durch Veränderung der Stromstärke in der Pendelspule und damit durch Veränderung von  $M$  verwirklichen. Das von  $\Phi$  und damit natürlich auch von  $V$  unabhängige<sup>9)</sup> Moment  $-\frac{e}{2\pi} \sin \Phi_s(t)$  wurde durch eine Spiralfeder gewonnen, die durch einige volle Umdrehungen vorgespannt wurde. Die Größe des übertragenen Drehmoments folgt zwar dem Hookesschen Gesetz, doch sind die tatsächlichen Pendelausschläge klein gegenüber diesem großen Vorspannungswinkel, so daß das Moment praktisch vom Ausschlagwinkel  $\Phi$  unabhängig ist. Zur zeitlichen Steuerung des Moments läßt sich, wie aus der Skizze ersichtlich, die Spiralfeder an ihrem oberen Ende rasch auf- und abwickeln. Eine Schwierigkeit, die bei der Steuerung der zeitlich veränderlichen Größen auftritt, liegt in der Polstelle von  $\Theta(t)$ . Einmal ist es unmöglich, das

<sup>9)</sup> Das Produkt  $e \cdot V \cdot \sin \Phi_s$  bedeutet die Energieaufnahme des synchronen Teilchens pro Umlauf, die nur durch die zeitliche Zunahme des magnetischen Führungsfeldes und durch den Strahlungsverlust bestimmt ist, aber in keiner Weise durch die Senderspannung.

Trägheitsmoment wirklich unendlich werden zu lassen. Statt dessen folgt man mit dem Trägheitsmoment der Funktion  $\Theta(t)$  bis zu einem sehr großen Wert unmittelbar vor der Polstelle; man läßt dann das Trägheitsmoment während des Durchgangs durch die Polstelle auf diesem Wert stehen, um es dahinter wieder mit  $\Theta(t)$  abnehmen zu lassen. Dadurch entsteht kein wesentlicher Fehler; denn nach dem Drehimpulssatz hat das in der Umgebung der Polstelle große Trägheitsmoment eine winzige Winkelgeschwindigkeit zur Folge, an der Polstelle selbst müßte momentan  $\dot{\Phi}$  völlig verschwinden, während beim Modell die Winkelgeschwindigkeit auf einem äußerst kleinen Wert bleibt. Dies ist der einzige Unterschied. Hinter der Polstelle bewegt sich dann das Pendel mit völlig richtigem Drehimpuls weiter.

Weiterhin läßt sich natürlich der Vorzeichenwechsel von  $\Theta(t)$  nicht am Trägheitsmoment des Pendels vornehmen. Statt dessen wechselt man das Vorzeichen der Drehmomente.

Die Steuerung der zeitlich veränderlichen Größen geschieht mit Hilfe von Programmscheiben. Sie steuern auch den Zeitpunkt des Vorzeichenwechsels der Drehmomente sowie den Startzeitpunkt des Pendels. Das Starten des Pendels mit kontrollierten Anfangsbedingungen geschieht mit Hilfe einer magnetischen Zange, die das Pendel auf einem bekannten, eingestellten Anfangsausgangswinkel festhält, bis sie durch die Programmscheibe geöffnet wird. Die Anfangswinkelgeschwindigkeit ist also immer null.

Die Registrierung der Pendelbewegungen geschieht mit einem Lichtzeiger über einen Spiegel auf einen mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Film. Zur Übersetzung der großen Pendelausschläge auf kleine Ausschläge des Spiegels wurde der Spiegel nicht unmittelbar am Pendel, sondern am Aufhängefaden befestigt, dicht unterhalb des oberen Endes.

Die Gesamtanordnung ist aus Abb. 5 ersichtlich. Pendel, Magnet und Registriervorrichtung sind auf einem Drehtisch montiert, dessen Drehachse mit der des Pendels zusammenfällt. Die Bedeutung dieses Drehtisches wird im letzten Abschnitt erläutert. Ein paar technische Daten mögen die Größenverhältnisse wiedergeben: Die Feldstärke im Luftspalt betrug etwa 3000 Gauß. Die Amperewindungszahl der Pendelspule lag bei 20. Der volle Bereich der Änderung des Trägheitsmomentes entsprach einer Änderung der Schwingungszeit von etwa 0,6 sec bis auf 10 sec.

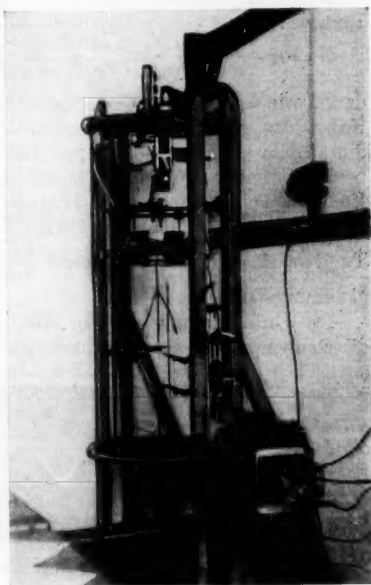


Abb. 5. Photo der Gesamtanordnung

### 3. Allgemeiner Überblick über die Phasenschwingungen, die damit gekoppelten Energieschwingungen und die besonderen Verhältnisse in der Umgebung der kritischen Energie

In genügender Entfernung oberhalb der kritischen Energie werden für kleine Amplituden die Lösungen der Phasenschwingungsgleichung durch die von D. Bohm und L. Foldy angegebene<sup>2)</sup> adiabatische Näherung beschrieben:

$$\Phi = \Phi_s + \left( \frac{2 \omega_s^2 \cdot K}{\pi \cdot e \cdot V \cdot E_s \cos \Phi_s} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot J^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \left\{ \left( \frac{e \cdot V \cdot K \cos \Phi_s}{2 \pi E_s} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega_s t + \psi \right\},$$

wo  $J$  und  $\psi$  Integrationskonstanten sind.

In entsprechender Weise gilt in genügender Entfernung vor der kritischen Energie:

$$\Phi = \pi - \Phi_s + \left( \frac{2 \omega_s^2 \cdot K}{\pi \cdot e \cdot V \cdot E_s \cos \Phi_s} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot J^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \left\{ \left( \frac{e \cdot V \cdot K \cos \Phi_s}{2 \pi E_s} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega_s t + \psi \right\};$$

denn, wie aus der Phasenschwingungsgleichung unmittelbar ersichtlich, ist wegen des anderen Vorzeichens von  $\Theta$  hier nicht mehr  $\Phi_s$ , sondern  $\pi - \Phi_s$  die stabile Gleichgewichtslage. Die schematische Skizze, Abb. 7a, zeigt die beiden Bereiche möglicher Phasenschwingungen vor und hinter der kritischen Energie. Diese Näherungen beschreiben die Bewegungen nur für hinreichend kleine Amplituden, da sie auf einer sich auf das lineare Glied beschränkenden Taylor-Entwicklung des Terms  $\frac{e \cdot V}{2 \pi} (\sin \Phi - \sin \Phi_s)$  der Phasenschwingungsgleichung beruhen.

Die Untersuchung mit der Analogiemaschine zeigte zunächst einmal, wie die Schwingungen bei großen Amplituden aussehen. In Abb. 6 ist eine Auf-

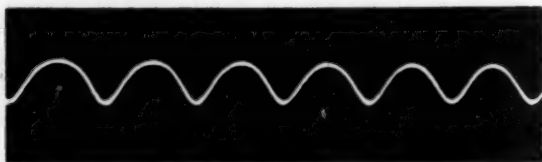


Abb. 6. Photogramm einer Phasenschwingung großer Amplitude

nahme einer Schwingung großer Amplitude wiedergegeben. Das Trägheitsmoment des Pendels wurde bei dieser Aufnahme konstant gelassen. Erwartungsgemäß wird die Bewegung unter dem Einfluß des konstanten Drehmomentes unsymmetrisch. Außerdem wird die Schwingungsdauer jetzt amplitudenabhängig. Mit zunehmender Amplitude nimmt die Schwingungsdauer stetig zu. Die maximal mögliche Amplitude reicht bis zur labilen Gleichgewichtslage, auf der das Teilchen theoretisch beliebig lange bleiben kann, was einer unendlichen Schwingungsdauer entspricht.

Weiterhin zeigte die Untersuchung bei kleinen Amplituden, daß der Bereich, in dem merkliche Abweichungen von der adiabatischen Näherung auftreten, sich auf die unmittelbare Umgebung der kritischen Energie beschränkt, und zwar auf eine Zone von etwa zehn vollen Phasenschwingungen. In der adiabatischen Näherung gehen die Amplituden beim Annähern an die kritische Energie gegen null. In der exakten Lösung nehmen die Amplituden



zwar auch beim Annähern an die kritische Energie stetig ab, doch bleiben sie an der kritischen Stelle selbst endlich. In Abb. 7 ist eine Aufnahme der Phasenschwingungen in der unmittelbaren Umgebung der kritischen Energie wiedergegeben. Das Teilchen schwingt zunächst um die Gleichgewichtslage  $\pi - \Phi_s$  herum. Frequenz und Amplitude nehmen ab. An der Stelle der kritischen Energie wird  $\pi - \Phi_s$  zur labilen und  $\Phi_s$  zur stabilen Gleichgewichtslage. Das Teilchen befindet sich gerade etwas unterhalb von  $\pi - \Phi_s$ . (Die Stelle der kritischen Energie ist daran zu erkennen, daß dort immer  $\dot{\Phi} = 0$ .) Es führt jetzt eine weitere Schwingung um die neue Gleichgewichtslage  $\Phi_s$ ,

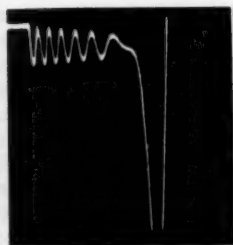


Abb. 7. Photogramm, Verlust eines Teilchens hinter der kritischen Energie

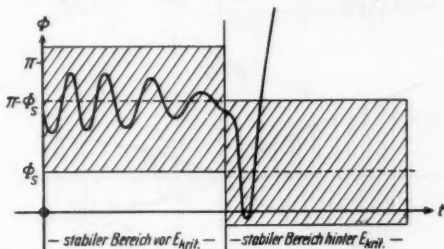


Abb. 7a. Die beiden Bereiche stabiler Schwingungen

herum aus mit beinahe der maximal möglichen Amplitude. Hinter der kritischen Energie nehmen aber die Phasenschwingungsamplituden wieder zu, so daß das Teilchen über die labile Gleichgewichtslage  $\pi - \Phi_s$  hinausschwingt<sup>10</sup>). Es verläßt jetzt den Bereich stabiler Schwingungen, seine Phase nimmt weiter beschleunigt zu (im Modell unter der Wirkung des konstanten Drehmomentes), und seine Energie sinkt immer tiefer unter den Wert der Energie des synchronen Teilchens, bis es auf die Innenwand der Beschleunigungskammer auftrifft und verloren geht. Um die Umgebung der kritischen Energie, insbesondere das Verhalten unmittelbar oberhalb der kritischen Energie eingehender zu studieren, wurde ein „Verlust der Teilchen“ dadurch vermieden, daß kein Vorzeichenwechsel an den Momenten vorgenommen wurde. Die auf diese Weise erhaltenen Teilchenbahnen haben keineswegs nur theoretisches Interesse. Sie stellen nämlich genau die Bewegung dar, die beim Synchrotron auftreten würden, wenn man genau im Zeitpunkt des Erreichens der kritischen Energie momentan die Phase des Senders um den Betrag  $\pi - 2\Phi_s$  verschieben würde.

Dieser Idealfall läßt sich zwar bei einem wirklichen Synchrotron niemals exakt verwirklichen, doch sind für eine angenäherte, mit technischen Mitteln mögliche Verwirklichung ausreichende Toleranzen da, wie im letzten Abschnitt ausführlich beschrieben wird. Die Abb. 8 zeigt die Aufnahme einer Phasenschwingung, bei der der Durchgang durch  $E_{krit}$  in der beschriebenen Weise mit der Analogiemaschine vorgenommen wurde.

Es möge an dieser Stelle eine Überlegung wiedergegeben werden, die die Verallgemeinerung spezieller Resultate auf beliebige Parameter betrifft.

<sup>10</sup>) Vergleiche dazu die schematische Skizze auf Abb. 7a.

Die Phasenschwingungsgleichung enthält drei wesentliche Synchrotronparameter: der erste wesentliche Parameter gibt an, wie rasch die synchrone Energie mit der Zeit zunimmt. Durch die oben erwähnte Zeittransformation  $\tau = k \cdot t$  wurde er aus allen Überlegungen und Resultaten eliminiert. Der

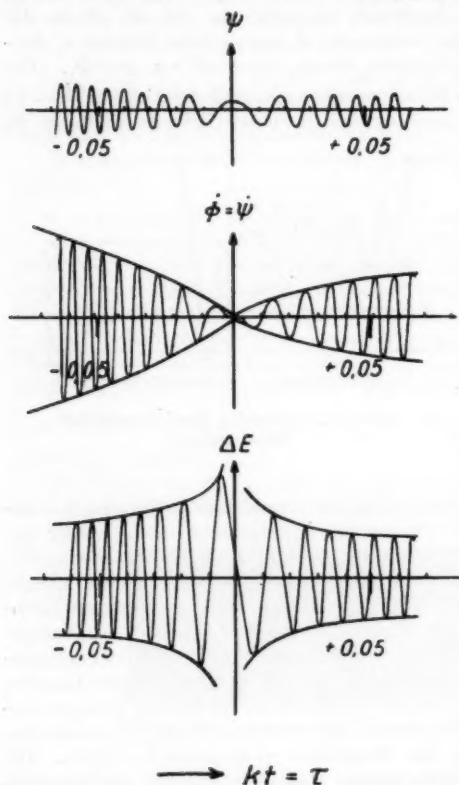


Abb. 8. Durchgang durch die kritische Energie mit Hilfe des idealen Phasensprungs. Darstellung von:  $\Psi(\tau)$ ,  $\Phi(\tau)$  und  $\Delta E(\tau)$

zweite wesentliche Parameter ist die synchrone Phase  $\Phi_s$ ; sie kann zeitabhängig sein. In dem kurzen Zeitintervall der Umgebung der kritischen Energie, das im folgenden interessiert, möge sie jedoch als konstant angesehen werden. Sie bestimmt die Gleichgewichtslage, um die herum die Schwingungen auftreten. Durch die Transformation:  $\Psi = \Phi - \Phi_s$  hinter der kritischen Energie, bzw.  $\Psi = \Phi - (\pi - \Phi_s)$  vor der kritischen Energie läßt sich damit auch  $\Phi_s$  eliminieren. Tatsächlich hat man im allgemeinen in der Umgebung der kritischen Energie wegen der vorangehenden Amplitudenabnahme mit kleinen Amplituden zu rechnen, so daß man schon aus diesem Grunde zweckmäßigerweise die Untersuchung auf kleine Amplituden beschränkt. Der dritte wesentliche Parameter ist die Stärke der Phasenfokussierung bzw. die Direktionskraft in der Phasenschwingungsgleichung. Sie ist im wesentlichen durch die Senderspannung bestimmt (und, wenn man nicht mit der Grundschwingung arbeitet, sondern mit einer Oberwelle, durch deren Ordnung);

einen kleinen Einfluß auf die Direktionskraft hat außerdem  $\Phi_s$ . Die Stärke der Phasenfokussierung bestimmt natürlich die Phasenschwingungsfrequenz und damit die zeitliche Dauer der interessierenden etwa zehn vollen Phasenschwingungen in der Umgebung von  $E_{krit}$ , die durch die adiabatische Näherung nicht beschrieben werden. Diese Zeitspanne sei:  $-\tau_0 < \tau < +\tau_0$  ( $\tau_0$  repräsentiert somit den Parameter der Stärke der Phasenfokussierung). Dieser dritte Parameter hat im allgemeinen einen grundsätzlichen Einfluß auf die Gestalt der Lösungen, da er das durchlaufene Programm der Funktion  $\Theta(\tau)$  bestimmt. Allerdings ändert sich das Programm, wenn man mit  $\tau_0$

heruntergeht, unterhalb von etwa  $\tau_0 = 0,05$  praktisch verhältnismäßig, so daß unterhalb von  $\tau_0 = 0,05$  die Lösungen auch gegenüber  $\tau_0$  invariant werden. Aus diesem Grunde wurden die folgenden Messungen ausschließlich bei  $\tau_0 < 0,05$  ausgeführt. Die Bevorzugung dieses Gebietes ist überdies deswegen gerechtfertigt, weil man bei großen Protonensynchrotrons mit starker Fokussierung wohl auch wirklich in diesem Gebiet arbeiten wird.

Die Lösungen der Phasenschwingungsgleichung unterscheiden sich schließlich noch durch zwei Integrationskonstanten, also etwa Amplitude und Phase. Eine Variation der Amplituden führt zu mathematisch ähnlichen Lösungen, solange die Amplituden klein sind, da, wie unmittelbar aus der Gestalt der

Phasenschwingungsgleichung folgt, dann mit  $\Psi(\tau)$  auch  $c \cdot \Psi(\tau)$  eine Lösung ist. Die Phasenlage der Phasenschwingung dagegen bleibt ein wesentlicher Parameter, der sorgfältige Berücksichtigung verlangt. Im Sinne dieser Überlegungen ist die in Abb. 8 dargestellte Phasenschwingung eine durchaus allgemeingültige Lösung der Phasenschwingungsgleichung in dem Bereich, in dem die adiabatische Näherung versagt.

Es muß an dieser Stelle eine Untersuchung von K. Johnson<sup>11)</sup> erwähnt werden, dem es gelang, von derselben Phasenschwingungsgleichung ausgehend für die unmittelbare Umgebung der kritischen Energie eine analytische Näherungslösung zu gewinnen. Auf Abb. 8 ist unter der Phasenschwingung ihre Ableitung aufgetragen und darunter die mit der Phasenschwingung gekoppelte Energieschwingung. Man gewinnt die Energieschwingung aus der Phasenschwingung unter Verwendung der Gleichung:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = -K \cdot \frac{\Delta E}{E_s}$$

<sup>11)</sup> K. Johnson, Phase Oscillations and Transition Energy Problems, Lectures on the Theory and Design of an Alternating-Gradient Proton Synchrotron (Conference of the Alternating-Gradient Proton Synchrotron at Geneva, Oktober 26-27-28, 1953).

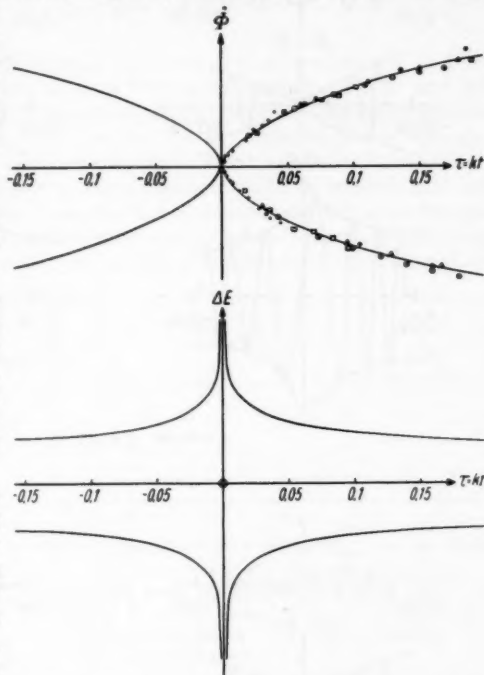


Abb. 9 Envelopen für  $\phi$  und  $\Delta E$  für kleine Amplituden der Phasenschwingung

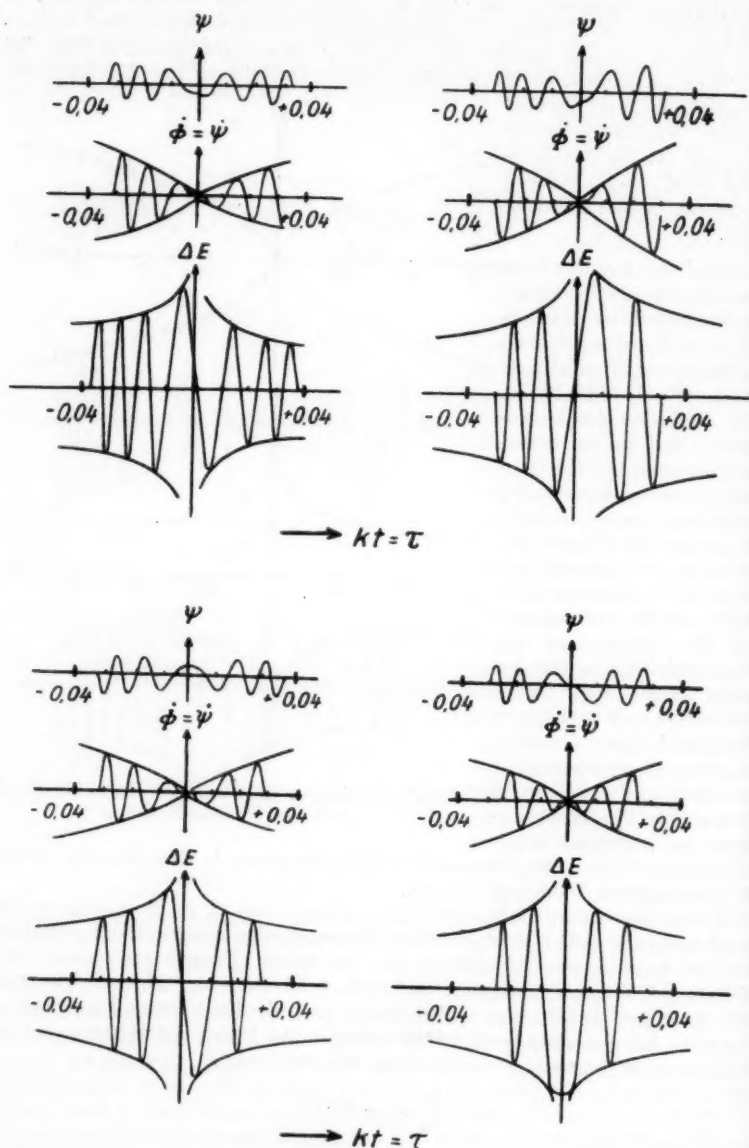


Abb. 10. Die 4 Typen des Durchgangs durch die kritische Energie beim idealen Phasensprung des Senders

oder, da:  $\Delta\omega = \dot{\Phi}$

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\frac{E_s}{K \cdot \omega_s} \cdot \dot{\Phi} \\ &= -\Theta(t) \cdot \dot{\Phi} \cdot \omega_s.\end{aligned}$$

Man muß also die Phaserschwingung nach der Zeit differenzieren und im wesentlichen mit dem Trägheitsmoment  $\Theta(t)$  multiplizieren. Für  $\Theta$  und  $\Delta E$  gibt es Enveloppen; sie wurden mit der Analogiemaschine aufgenommen und in Abb. 9 dargestellt. Interessant ist der Pol der Envelope der Energieschwingung an der Stelle der kritischen Energie. Es ist wesentlich für das Bild, das man sich von den Vorgängen an der kritischen Stelle zu machen hat, daß die Amplitude der Energieschwingung beim Annähern an die kritische Energie zunimmt. Sie kann zwar tatsächlich nicht unendlich werden, doch schwingt die Energie zwischen den Enveloppen an der Polstelle um so höher hinauf, je größer die Phasenschwingungsfrequenz, d. h. aber je stärker die Phasenfokussierung ist. Dies ist insofern von Bedeutung, als mit der Energieschwingung natürlich eine Radialbewegung gekoppelt ist, deren Amplitude nicht größer werden darf als der Radius der Kammer.

Interessant ist folgendes weitere Resultat für den Durchgang durch die kritische Energie mit Hilfe des „idealen Phasensprunges“. Die Ordinaten der Envelope an die Phasenschwingung sind in symmetrischen Punkten auf der Zeitskala vor und hinter der kritischen Energie selbst in diesem idealen Fall keinesfalls gleich, sondern

die Amplitude ändert sich um einen Faktor, der abhängig ist von der Phasenlage der Phasenschwingung, in der die Teilchen die kritische Stelle erreichen. Abb. 10 zeigt die vier typischen Fälle. Die beiden ersten Fälle sind die Grenzfälle des symmetrischen und antisymmetrischen Durchgangs, bei denen sich die Amplituden nicht ändern. Die ersichtliche Verschiebung der Phasenlage zwischen Phasenschwingung und Energieschwingung hat ihre Ursache natürlich in der Differentiation nach der Zeit. Die beiden anderen Fälle sind Beispiele für Zunahme und Abnahme der Amplitude. Der Verlauf der Schwingungen selbst erlaubt es, anschaulich zu verstehen, wie eine Änderung der Amplituden zustandekommt. Die Abb. 11 zeigt den Faktor der Amplitudenänderung zwischen symmetrischen Punkten als Funktion der Phasenlage der Phasenschwingung an der kritischen Stelle.

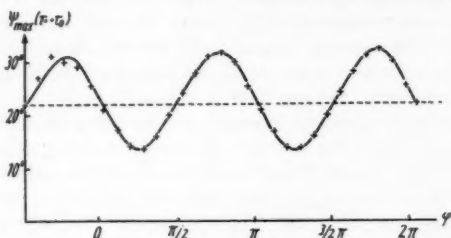
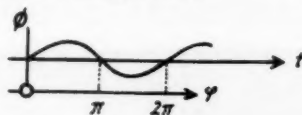


Abb. 11. Die Maximalamplitude  $\Psi_{\max}$  an der Stelle  $\tau = +\tau_0$  als Funktion der Phasenlage der Phasenschwingung  $\varphi$  an der kritischen Energie.  $\Psi_{\max}$  an der Stelle  $\tau = -\tau_0$  beträgt  $22^\circ$  und es liegen volle 10 Phasenschwingungen dazwischen (gültig für  $\tau_0 < 0,1$ ). Zur Definition von  $\varphi$ :



## 4. Über die technischen Möglichkeiten, die kritische Energie zu überwinden

## a) Ein Phasensprung des Senders

Im Zeitpunkt des Erreichens der kritischen Energie läßt man die Phase des Senders um den Betrag  $\pi - 2\Phi_s$  springen. Diese Möglichkeit wurde bereits in der Arbeit von E. D. Courant, M. S. Livingston und H. S. Snyder erwähnt<sup>1)</sup>.

Ein solcher Phasensprung kann technisch jedoch nur in endlicher Zeit ausgeführt werden. Außerdem kann er nur für wenige Teilchen angenähert im richtigen Zeitpunkt erfolgen; die tatsächlich im Synchrotron schwingenden Teilchen erreichen nämlich die kritische Stelle des Vorzeichenwechsels der Direktionskraft zu verschiedenen Zeitpunkten aus zwei Gründen:

Der erste Grund ist in den Überlegungen am Ende des ersten Abschnitts enthalten. Er liegt darin, daß die synchrone Energie nicht allein den Zeitpunkt des Vorzeichenwechsels der Direktionskraft bestimmt, sondern daß auch die momentane von Teilchen zu Teilchen verschiedene Energieschwingungsamplitude einen Einfluß hat, wie in Abb. 3 dargestellt wurde.

Ein zweiter Grund, auf den K. Johnson<sup>11)</sup> aufmerksam machte, liegt insbesondere beim A. G. Synchrotron in Nichtlinearitäten der radialen Feldänderung. Ist nämlich  $n$  radialabhängig, so wird damit auch die von  $n$  abhängige kritische Energie zu einer Funktion des Radius, und da die Teilchen sich wegen der mit der Phasenschwingung gekoppelten Radialschwingung auf verschiedenen Mometanradien bewegen, unterscheiden sie sich damit auch im Wert von  $E_{\text{krit}}$ . Das Ziel der folgenden Messungen war, allgemeingültige Aussagen über die Toleranzen für die Dauer des Phasensprungs sowie für den zeitlichen Abstand zwischen Phasensprung des Senders und Vorzeichenwechsel der Direktionskraft beim Teilchen zu gewinnen.

Ein Phasensprung des Senders in endlicher Zeit läßt sich bei der Analogiemaschine in besonders einfacher Weise dadurch verwirklichen, daß man den Drehtisch in dieser Zeit um den Winkel der gewünschten Phasenverschiebung dreht.

Ein Phasensprung des Senders um den Wert  $\Delta\varphi$  in der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$  ist nämlich äquivalent einem kurzzeitigen Frequenzfehler  $\Delta\omega$  mit:

$$\Delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \Delta\omega \cdot dt.$$

Der Frequenzfehler  $\Delta\omega$  läßt sich gerade dadurch verwirklichen, daß man den Drehtisch mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Delta\omega$  dreht: Die Phasenschwingungsgleichung beschreibt die Schwingung zwar für beliebige Zeitabhängigkeit von  $\omega_s$ . Aber kleine Schwankungen um den richtigen Frequenzgang herum führen schon zu starken Schwankungen von  $\sin\Phi_s$ , die un bequem zu berechnen und noch schwieriger zu steuern wären. Es ist sehr viel richtiger, die für den idealen Frequenzgang berechneten Funktionen  $\Theta(t)$  und  $\sin\Phi_s(t)$  zu verwenden und statt dessen den Einfluß von Frequenzfehlern durch eine Taylor-entwicklung zu gewinnen. Diese sei im folgenden durchgeführt.

Es sei also:

$$\omega_s = \omega_{s0} + \Delta\omega$$

$\omega_s$  = tatsächlicher Frequenzgang

$\omega_{s0}$  = idealer Frequenzgang

und damit:

$$\frac{d\omega_s}{dt} = \frac{d\omega_{s0}}{dt} + \frac{d\Delta\omega}{dt} \quad \Delta\omega(t) = \text{momentaner Frequenzfehler.}$$

Es sei:  $\Delta\omega < \omega_{s0}$ , jedoch keineswegs:  $\frac{d\Delta\omega}{dt} < \frac{d\omega_{s0}}{dt}$ . In der Phasenschwingungs-

gleichung (3) sind die Glieder:  $\Theta(t) = \frac{E_s}{\omega_s^2 \cdot K}$ , sowie  $\frac{eV}{2\pi} \cdot \sin\Phi_s(t)$  zu entwickeln. Die



Entwicklung von  $\Theta(t)$  liefert:

$$\frac{E_s}{\omega_s^2 \cdot K} = \frac{E_{s0}}{\omega_{s0}^2 \cdot K_0} \cdot \left\{ 1 + \left( -\frac{3}{k} + \frac{2}{k \cdot \beta^2} - \frac{2}{\beta^2} \right) \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \right\} \approx \frac{E_{s0}}{\omega_{s0}^2 \cdot K_0}.$$

Alle Glieder klein von erster Ordnung mögen vernachlässigt werden, da sie nichts ausmachen im Vergleich zu dem Hauptglied, das bei der Entwicklung von  $\sin \Phi_s(t)$  auftritt:

$$\frac{e V}{2 \pi} \cdot \sin \Phi_s = \frac{\dot{E}_s}{\omega_s} + \frac{L_s}{2 \pi}.$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Energiebilanz. ( $L_s$  = Strahlungsverlust/Umlauf.) Mit:  $E_s = E_{s0} + \Delta E$  ergibt sich bei Vernachlässigung der Glieder klein von erster Ordnung:

$$\frac{e V}{2 \pi} \cdot \sin \Phi_s \approx \frac{\dot{E}_{s0}}{\omega_{s0}} + \frac{\dot{\Delta E}}{\omega_{s0}} + \frac{L_{s0}}{2 \pi}.$$

(Es unterscheidet sich nämlich  $L_s$  nur um ein Glied klein von erster Ordnung von  $L_{s0}$ .) Es ist  $\dot{\Delta E}$  keineswegs klein von erster Ordnung gegen  $\dot{E}_{s0}$ , da es nicht durch  $\Delta\omega$ , sondern durch  $\frac{d\Delta\omega}{dt}$  bestimmt wird.

Es tritt also das Zusatzglied auf:

$$\frac{e V}{2 \pi} \sin \Phi_s = \frac{e V}{2 \pi} \sin \Phi_{s0} + \frac{\dot{\Delta E}}{\omega_{s0}}.$$

Dies Zusatzglied ist jetzt mit Hilfe des Frequenzfehlers auszudrücken, was unter Verwendung der Gl. (2):

$$\frac{\Delta\omega_s}{\omega_{s0}} = -K_0 \cdot \frac{\Delta E}{E_{s0}}$$

gelingt. Nach Differentiation folgt nämlich:

$$\frac{\dot{\Delta E}}{\omega_{s0}} \approx -\frac{d}{dt} \left( \frac{E_{s0}}{\omega_s^2 \cdot K_0} \cdot \Delta\omega \right).$$

Damit lautet die neue Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{E_{s0}}{\omega_{s0}^2 \cdot K} \cdot (\dot{\Phi} + \Delta\omega) \right] + \frac{e V}{2 \pi} (\sin \Phi - \sin \Phi_{s0}) = 0.$$

Sie unterscheidet sich von der alten Gleichung nur dadurch, daß zu  $\dot{\Phi}$  der Frequenzfehler additiv hinzutritt. Dies additive Zusatzglied läßt sich im Modell nun aber gerade dadurch verwirklichen, daß man den ganzen Mechanismus auf einen Drehtisch setzt und mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Delta\omega$  rotieren läßt. Die neue Bewegungsgleichung des Pendels für das Koordinatensystem des mitbewegten Beobachters (mitbewegte Kamera) ist dann nämlich mit dieser neuen Gleichung identisch, wie leicht einzusehen ist.

In Abb. 12 sind zwei Photogramme von Teilchenbahnen wiedergegeben, bei denen der Phasensprung des Senders in der beschriebenen Weise vorgenommen wurde. Das Teilchen auf der ersten Aufnahme bleibt fokussiert. Bei der zweiten Aufnahme kam der Phasensprung nicht genau im richtigen Zeitpunkt. Das Teilchen hat nach dem Passieren von  $E_{krit}$  eine stark vergrößerte Amplitude und geht nach wenigen Schwingungen verloren.

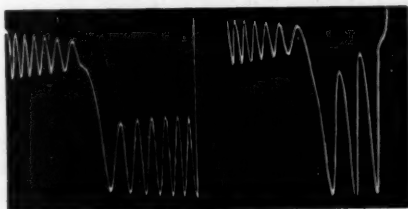


Abb. 12. Photogramme der Phasenschwingung beim Durchgang durch  $E_{krit}$  mit Hilfe eines Phasensprungs von endlicher Dauer

In einer ersten Meßreihe wurde untersucht, wie sich die Amplituden zwischen symmetrischen Punkten (auf der Zeitskala) vor und hinter der kritischen Energie ändern als Funktion der Dauer des Phasensprungs. Der Phasensprung kam bei dieser Meßreihe also genau im richtigen Zeitpunkt. Da die Änderung der Amplituden von der Phasenlage der Phasenschwingung abhängig ist, mußte diese natürlich variiert werden. Abb. 13a zeigt das Resultat für eine Anfangsamplitude von  $20^\circ$  an der Stelle  $\tau = -\tau_0$ . ( $\tau_0$  wie oben definiert dadurch, daß zwischen  $-\tau_0$  und  $+\tau_0$  zehn volle Phasenschwingungen

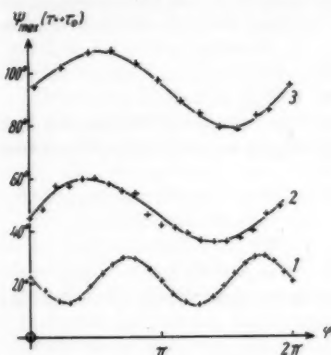


Abb. 13a.  $\Psi_{\max}$  an der Stelle  $\tau = +\tau_0$  als Funktion der Phasenlage der Phasenschwingung an der Stelle der kritischen Energie. Scharparameter ist die Dauer des Phasensprungs des Senders:

Kurve	1	2	3
Dauer des Phasensprungs in d. Einh. $\tau_0$	0	0,2	0,44

$\Psi_{\max}$  an der Stelle  $\tau = -\tau_0$  betrug  $20^\circ$  und zwischen  $-\tau_0$  und  $+\tau_0$  lagen 10 volle Phasenschwingungen. Gültig für alle  $\tau_0 < 0,1$

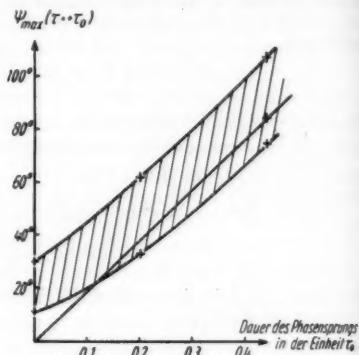


Abb. 13b. Die Bereiche der Maximalamplitude  $\Psi_{\max}$  an der Stelle  $\tau = +\tau_0$  als Funktion der Dauer des Phasensprungs des Senders. ///  $\Psi_{\max}$  ( $\tau = -\tau_0$ ) =  $20^\circ$ , - - -  $\Psi_{\max}$  ( $\tau = -\tau_0$ ) =  $0^\circ$

liegen). Das Resultat dieser Untersuchung läßt sich nicht unmittelbar für beliebige Amplituden verallgemeinern. In Abb. 13b sind die Bereiche der hinter der kritischen Energie an der Stelle  $\tau = +\tau_0$  auftretenden Amplituden noch einmal für die Anfangsamplitude von  $20^\circ$  sowie für die Anfangsamplitude von  $0^\circ$  als Funktion der Dauer des Phasensprungs dargestellt. Insbesondere entnimmt man diesem Diagramm, daß der Faktor der Amplitudenänderung bei gleicher absoluter Dauer (in sec) des Phasensprungs um so größer wird, je stärker man die Phasenfokussierung macht; starke Phasenfokussierung heißt, wie in Abschnitt 3 gezeigt, kleines  $\tau_0$ , und das bedeutet in Abb. 13b einmal eine große Abszisse, zum andern aber eine kleine Anfangsamplitude. Durch beides wird der Faktor der Amplitudenänderung groß.

In einer zweiten Meßreihe wurde der Faktor der Amplitudenänderung untersucht, die auftritt, wenn der Phasensprung zwar momentan erfolgt,

doch nicht im richtigen Zeitpunkt. In diesem Fall spielt die Phasenlage der Phasenschwingung eine besonders starke Rolle. Die Resultate sind in den Abb. 14a und 14b gestrichelt eingetragen. Insbesondere erlauben die Kurven der Abb. 14a die Belegungswahrscheinlichkeit des Bereichs der Amplitudenfaktoren, der in Abb. 14b dargestellt ist, zu berechnen. Die Größenordnung des Effektes läßt sich dadurch charakterisieren, daß die Amplituden beim Durchgang durch die kritische Energie im Mittel etwa um einen Faktor zehn zunehmen, wenn zwischen Phasensprung des Senders und dem Erreichen der kritischen Stelle durch das Teilchen eine halbe Phasenschwingung vergeht.

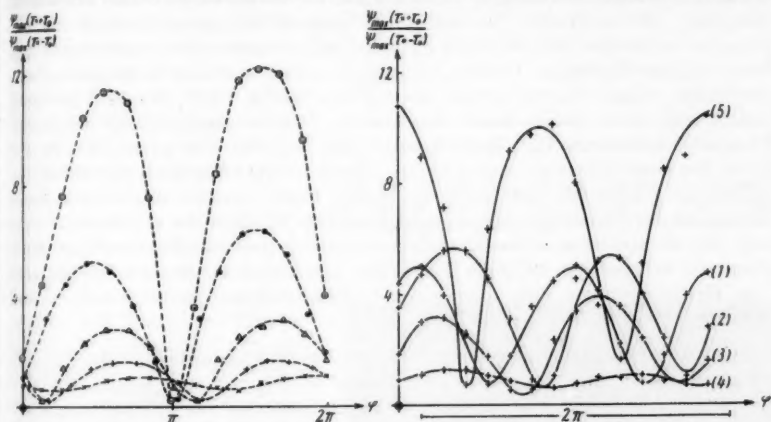


Abb. 14a. Die Abhängigkeit des Faktors der Amplitudenänderung von der Phasenlage der Phasenschwingung

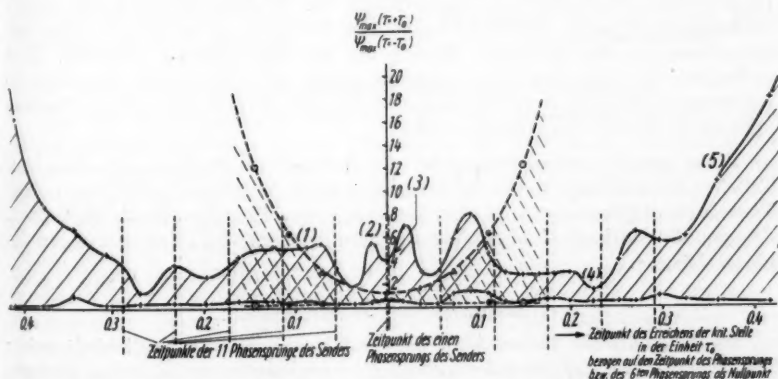


Abb. 14b. Die Bereiche des Faktors der Amplitudenänderung zwischen symmetrischen Punkten vor und hinter der kritischen Energie als Funktion des Zeitpunkts, an dem die krit. Stelle erreicht wird. //// bei einem Phasensprung des Senders; /// bei 11 Phasensprüngen des Senders (bei 10 vollen Phasenschwingungen zwischen  $-\tau_0$  und  $+\tau_0$  und bei kleinen Amplituden der Phasenschwingung). Das Diagramm ist gültig für  $\tau_0 < 0,05$

### b) Eine größere ungerade Zahl von äquidistanten Phasensprüngen des Senders<sup>12)</sup>

Eine weitere Methode wurde in einer früheren Notiz erwähnt<sup>12)</sup>. Es ist die Anwendung des Prinzips der A. G.-Fokussierung (Sektorfelder mit alternierendem Feldgradienten) auf die Phasenschwingungen. Der Nachteil der Methode in der dort beschriebenen Form liegt darin, daß die Phasenfokussierung im allgemeinen hierbei sehr schwach werden dürfte, wenn man nicht zur Beschleunigung der Teilchen eine sehr hohe Spannung und eine Oberwelle sehr hoher Ordnung verwendet. Der besondere Vorteil ist, daß alle Teilchen fokussiert bleiben unabhängig davon, wann sie die kritische Stelle erreichen. Man kann den erwähnten Nachteil durch folgende veränderte Anwendung des Prinzips vermeiden. Man arbeitet zunächst mit normaler Phasenfokussierung. Kurz vor der kritischen Energie beginnend macht man nun in gleichen Zeitabständen einige Phasensprünge des Senders um  $\pi - 2\Phi_c$  hin und her und erzielt auf diese Weise nach dem neuen Fokussierungsprinzip weiterhin Phasenfokussierung. Den Zeitabstand wählt man so, daß man etwa in der Mitte des Stabilitätsdiagramms bleibt. Dann ist die Stabilisierung nicht viel schlechter als vorher (nur etwa um einen Faktor zwei). Innerhalb dieses Zeitraums der Phasensprünge erreicht dann das Teilchen die kritische Energie und bleibt weiterhin fokussiert, fokussierender und defokussierender Zeitabschnitt vertauschen lediglich ihre Rolle. Nach einer ungeraden Gesamtzahl von Phasensprüngen läßt man dann die Senderphase wieder konstant und hat wieder normale Fokussierung.

Es wurde eine Meßreihe durchgeführt, bei der elf Phasensprünge des Senders verwandt wurden. Untersucht wurde wie vorher bei nur einem Phasensprung der Amplitudenänderungsfaktor als Funktion der Zeitdifferenz zwischen dem mittleren (d. h. dem 6.) Phasensprung und dem Erreichen der kritischen Stelle. Die Resultate wurden in den Abb. 14a und 14b ausgezogen eingetragen. Die Abb. 14b erlaubt einen aufschlußreichen Vergleich mit den Verhältnissen bei nur einem Phasensprung. Man erkennt, daß jetzt die Faktoren der Amplitudenänderung klein bleiben, solange das Teilchen die kritische Stelle nur irgendwann in dem gesamten Bereich der elf Phasensprünge erreicht. Erst außerhalb der Zone der Phasensprünge steigt der Bereich der Amplitudenfaktoren an, und zwar dort etwa genau so steil, wie er im Falle nur eines Phasensprungs in dessen Umgebung ansteigt.

Wenn also der Streubereich für die Zeitpunkte, in denen die einzelnen Teilchen die kritische Stelle erreichen, groß ist, d. h. größer als die Dauer einer Phasenschwingung, dann ist die Methode eines Phasensprungs ungeeignet; dagegen die Methode einer größeren ungeraden Zahl von Phasensprüngen die ideale Lösung.

### c) Modulation der Senderspannung

Die schematische Skizze Abb. 7a legt folgende weitere Möglichkeit nahe: Die beiden Zonen stabiler Schwingungen vor und hinter der kritischen Energie überlappen sich praktisch nicht wegen der starken Dämpfung der Amplituden

<sup>12)</sup> Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn Prof. D. Kerst, Illinois.

<sup>13)</sup> E. Bodenstedt, Zur Überwindung der kritischen Energie beim Synchrotron mit starker Fokussierung, Z. Naturforschg. 8a, 502 (1953).

vorher und der Aufblähung dahinter. Es ist jedoch leicht möglich, die beiden Gleichgewichtslagen  $\pi - \Phi_s$  und  $\Phi_s$  an der kritischen Stelle soweit zu nähern, daß nun doch eine Überlappung der Zonen stabiler Schwingungen zu maximal 50% eintritt. Die Steuerung von  $\Phi_s$  kann man dadurch vornehmen, daß man die Senderspannung moduliert. Die technische Durchführung dürfte gar keine Schwierigkeiten machen, da diese Modulation nur ganz langsam vor sich zu gehen braucht. Schwierigkeiten dürften allerdings in jedem Fall für die Anwendung dieser Methode bestehen, wenn man es an der kritischen Stelle mit besonders kleinen Phasenamplituden zu tun hat, wie es praktisch bei großen Protonenbeschleunigern der Fall sein dürfte. Abb. 15 veranschaulicht die Methode in einem schematischen Diagramm. Abb. 16 ist ein Photogramm, das mit der Analogiemaschine gewonnen wurde, und das die Überwindung der kritischen Energie mit der Methode der Spannungsmodulation wiedergibt.

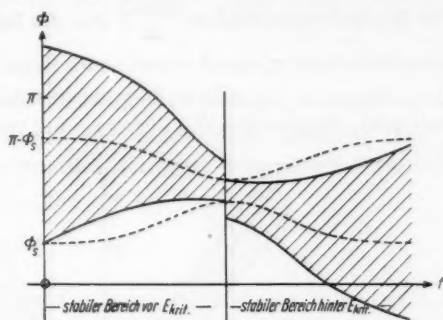


Abb. 15. Schematische Darstellung der Überlappung der beiden stabilen Bereiche durch Spannungsmodulation (diese ermöglicht eine Steuerung von  $\Phi_s$  und damit auch von  $\pi - \Phi_s$ )

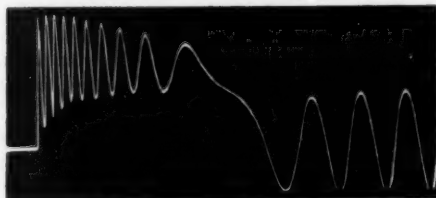


Abb. 16. Photogramm des Durchgangs durch  $E_{krit}$  durch Spannungsmodulation

#### d) Die Toleranzen für die Steuerung der Senderfrequenz

Eine mit der Überwindung der kritischen Energie verbundene ernste technische Schwierigkeit liegt in den Toleranzen, die man bei der Steuerung der Senderfrequenz einzuhalten hat. Da die Teilchen beim Durchgang durch die kritische Energie die Lichtgeschwindigkeit noch nicht erreicht haben, nimmt ihre Bahngeschwindigkeit und damit ihre Winkelgeschwindigkeit weiterhin zu. In entsprechender Weise muß die Senderfrequenz zunehmen. Wegen der großen Dauer einer Phasenschwingung in der kritischen Zone ist die Bewegung in dieser Zone besonders empfindlich gegenüber Fehlern in der zeitlichen Steuerung der Senderfrequenz; das entspricht bei der Analogiemaschine also Bewegungen des Drehtisches. Ein zeitlich konstanter Frequenzfehler  $\Delta\omega$  verschiebt den Zeitpunkt, an dem die kritische Energie erreicht wird und den Sollkreisradius, hat aber auf die Phasenschwingung selbst sonst keinen weiteren Einfluß. Dagegen reagieren die Phasenschwingungen empfindlich auf zeitliche Änderungen des Frequenzfehlers; d. h. also auf Fehler in der Richtung der Frequenzzeitkurve. Ein solcher Fehler läßt sich mit der Analogiemaschine sehr einfach verwirklichen. Man braucht nur den Drehtisch konstant zu be-

schleunigen. Die Resultate einer Meßreihe sind in Abb. 17 wiedergegeben. Eine parameterfreie Darstellung war dadurch möglich, daß die zeitliche Änderung des Senderfrequenzfehlers  $\frac{d(\Delta\omega_s)}{dt}$  von der Zeiteinheit Sekunde auf die invariante Zeiteinheit  $\tau_0$  transformiert wurde durch den Faktor  $\frac{\tau_0^2}{k^2}$ . Man entnimmt dem Diagramm zunächst einmal, daß die oberhalb der kritischen Energie auftretenden Amplituden  $\Psi_{\max}(\tau = \tau_0)$  nur wenig von der Anfangsamplitude

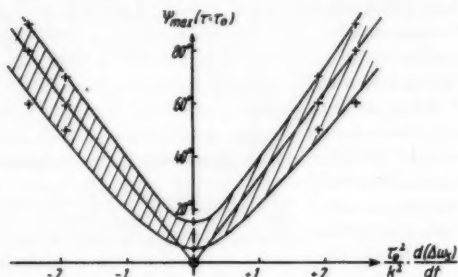


Abb. 17. Toleranzen für die Exaktheit des Frequenzhubs. Die Maximalamplitude an der Stelle  $\tau = \tau_0$  als Funktion des Fehlers im Senderfrequenzhub (zwischen  $\tau = -\tau_0$  und  $\tau = +\tau_0$  liegen 10 Phasenschwingungen,  $\tau_0 < 0,1$ ). //  $\Psi_{\max}(\tau = -\tau_0) = 10^\circ$ ;  $-+-\Psi_{\max}(\tau = -\tau_0) = 0^\circ$ ;  $\omega_s$  = Kreisfrequenz des Senders;  $\Delta\omega_s$  = Momentanwert der Abweichung der Kreisfrequenz des Senders vom Sollwert

$\Psi_{\max}(\tau = -\tau_0)$  abhängen. Man ersieht weiter, daß es günstig ist, mit möglichst starker Phasenfokussierung zu arbeiten, da  $\Psi_{\max}(\tau = +\tau_0)$  bei konstantem Fehler im Senderfrequenzhub  $\frac{d(\Delta\omega_s)}{dt}$  etwa mit  $\tau_0^2$  zunimmt, während die zulässigen Amplituden<sup>14)</sup> nur mit  $\sqrt[4]{\tau_0}$  ansteigen, wie sich ohne besondere Mühe aus der adiabatischen Näherung gewinnen läßt. Durch Einsetzen spezieller Synchrotrondaten für  $\tau_0$  und  $k$  entnimmt man dem Diagramm unmittelbar die Größe des Effektes.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. W. Paul für die Förderung der Arbeit meinen herzlichen Dank aussprechen. Ich verdanke Herrn Werner Hardt und meinen Kollegen von der Synchrotrongruppe Dr. Ehrenberg und Steinwedel zahlreiche wertvolle Diskussionen. Die Untersuchung wurde mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt.

<sup>14)</sup> Sie müssen hinreichend klein sein, um bei der stetigen Amplitudenzunahme bis zu der Stelle des Minimums von  $\Theta$  nicht über den stabilen Bereich hinauszugehen.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 28. April 1954.



## Berichtigung zur Arbeit:

### „Einige Bemerkungen zur Gisolfschen Theorie der Elektronenschwankungserscheinungen von Halbleitern“

Ann. Physik 6 14, 87, 1954

Von K. W. Böer

Bei der Berücksichtigung statistisch verteilter Lebensdauern von Leitungselektronen wurde vom Verf. seinerzeit übersehen, daß die Elektronenkonzentration, welche die Zahl der sekundlichen Anregungsprozesse  $N$  und die Lebensdauer  $\tau$  der Leitungselektronen enthält, nicht vor das Integral in Gl. (4) gezogen werden darf.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache und nach Verwendung von  $\bar{n} = N \tau_2 / Lq$  ergibt sich an Stelle von (4)

$$\bar{i}_n^2 = \frac{e^2 b^2 E^2 N}{\pi L^2 \tau_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{4 d\omega}{\omega^2} \int_0^\infty e^{-\tau/\tau_2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\tau. \quad (4^*)$$

Nach Ausführung der Integration erhält man statt (5) die mit den Ergebnissen von Bernamont und Van der Ziel übereinstimmende Gleichung

$$\bar{i}_n^2 = \frac{4 e b E^2 \tau_2}{R} \cdot \frac{\Delta\nu}{1 + \omega^2 \tau_2^2}. \quad (5^*)$$

In gleicher Weise sind auch im folgenden Paragraphen 22 die Integrationen (7) bzw. (7a) zu korrigieren. Es ergibt sich

$$\bar{i}_n^2 = \frac{e^2 b^2 E^2 N}{\pi L^2 \tau_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{4 d\omega}{\omega^2} \left[ \int_0^{\tau_0} e^{-\tau/\tau_2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\tau + \int_{\tau_0}^\infty e^{-\tau/\tau_0} \sin^2\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) d\tau \right]. \quad (7^*)$$

Hier wird die Integration jedoch exakt ausführbar und führt zu dem Ergebnis

$$\bar{i}_n^2 = \frac{4 e b E^2 \Delta\nu}{R} \cdot \left[ \tau_2 \frac{1 - e^{-\tau_0/\tau_2} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 \tau_2^2} + \frac{\sin \omega \tau_0}{\omega \tau_2} + \frac{\cos \omega \tau_0}{\omega^2 \tau_2^2} \right)}{1 + \omega^2 \tau_2^2} + \frac{\tau_0}{2} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right)}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2 e^{-\tau_0/\tau_2} \right]. \quad (8^*)$$

Ist  $\tau_2 \ll \tau_0$ , so folgt, wie zu erwarten, aus (8\*) direkt (5\*). Ist hingegen  $\tau_0 \ll \tau_2$ , so ergibt sich eine mit (9a) eng verwandte Gleichung

$$\bar{i}_n^2 = \frac{2 e b E^2 \tau_0 \Delta\nu}{R} \cdot \left( \frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2 e^{-\tau_0/\tau_2} \approx \frac{2 e b E^2 \tau_0 \Delta\nu}{R} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right)}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2. \quad (9^*)$$

Damit sind auch die Gleichungen (11), (12) und (14) mit sinngemäßer Ersetzung von  $\tau_0$  in (9a\*) durch  $\tau_1$  sowie A), B) und C) in der Diskussion durch die entsprechenden Gleichungen zu ersetzen.

Alle anderen in der oben genannten Arbeit enthaltenen Folgerungen und Diskussionen bleiben von dieser Korrektur unberührt.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle besonders herzlich Herrn Dr. Van Vliet sowie Herrn Prof. Bittel zu danken, die mich freundlicherweise auf den Fehler aufmerksam machten.

Berlin, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 11. August 1954

---

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74;  
für den Anzeigenteil: VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Hainstr. 17-19, Aufg. C,  
Ruf 21981. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 3; Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C1,  
Salomonstraße 18 B; Fernruf: 63105 und 63781. Veröffentlicht unter der Lizenznummer 285/1264  
des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik  
Printed in Germany Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 203/54



# ZEISS

## FUNKENERZEUGER FF 20

nach Feussnerschem Prinzip in VDE-Ausführung bei spektrochemischen Analysen die Gewähr für genaue Reproduzierbarkeit der Anregungsbedingungen



Verlangen Sie Druckschriften unter 32/R 2 „Fu“

### VEB CARL ZEISS JENA



**PHOTOZELLEN**  
für jeden Zweck

für Forschung  
für Technik  
für Tonfilm

Sonderliste Nr. 504  
Sonderliste Nr. 503  
Sonderliste Nr. 501

DEUTSCHE BLIMMLAMPEN-GESELLSCHAFT  
**PRESSLER ZELLEN**  
LEIPZIG C1

### Anleitung zur Analyse der Lösungsmittel

Von Dr. sc. nat. **KURT THINIUS**  
Dipl.-Chemiker, Magdeburg

86 Seiten mit 7 Abbildungen im Text.  
1953. Gr. 8°. DM 4.50

Praktische Chemie: Diese begrüßenswerte Arbeit entspricht sowohl den Bedürfnissen der Gewerbehygiene wie denjenigen der praktischen Chemie, zumal sich die Anwendungs- bzw. Geltungsbereiche der Lösungsmittel-Industrien immer mehr ausweiten.

M.  
**JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**

### FRITHJOF SITTIG FRAUENWALD (THÜRINGEN)

WERKSTÄTTE  
FÜR LABORATORIUMSBEDARF

#### Diffusions- und Dampfstrahlpumpen

Saugleistungen von 5 bis 200 m<sup>3</sup>/h

#### Vakuummeter

verschiedener Art

#### Zubehörteile

Hähne, Ventile, Normschliffe, Fallen, doppelwandige Gefäße usw.

#### Komplette Pumpanlagen

#### Vakuumfüllanlagen

Geräte nach Angabe oder Zeichnung  
auch in komplizierten Ausführungen

## Die elektroakustischen Wandler

Von Dr. Dr. HEINRICH HECHT, Kiel

3., erweiterte Auflage. XVI., 257 Seiten mit 52 Abbildungen i. T. 1954. Gr. 8°. DM 19.—, Ln. DM 20.30

**Frequenz:** Dieses Buch des bekannten Verfassers gehört zum notwendigen Rüstzeug des Elektroakustikers. Es ist speziell dem Schallsignaltechniker auf den Leib geschrieben, doch kommt die allgemeine Elektroakustik deswegen nicht zu kurz; denn neben den meist in Resonanz arbeitenden Signalendern und -empfängern werden auch der Lautsprecher, das Telefon, das Kondensatormikrophon und der Schwingquarz behandelt. Deshalb gehört das Buch auf den Arbeitstisch eines jeden Ingenieurs und Physikers, der sich mit der Theorie elektroakustischer Geräte befaßt. M. Gosewinkel

## Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde

Von Dr. Dr. H. HECHT, Kiel

3., erweiterte Auflage. VIII, 167 Seiten mit 46 Abbildungen i. T. 1954. Gr. 8°. DM 16.—, Hln. DM 17.50

**Archiv für elektrische Übertragung:** Das Buch ist nicht nur hervorragend geeignet, Anfänger in die Grundgedanken der technischen Schwingungslehre einzuführen, sondern es wird auch der erfahrene Fachmann, der bestrebt ist, sich stets immer wieder auch um die physikalische Fundamentierung und den systematischen Aufbau seines Arbeitsgebietes zu bemühen, eine Fülle von Anregungen und Wissenswerten daraus schöpfen. F. A. Fischer

## Die Oxydkathode

Von Dr.-Ing. G. HERRMANN, Berlin, und Dr. phil. S. WAGENER, London

### I. Teil: Physikalische Grundlagen

Von Dr. phil. S. WAGENER

2., umgearb. Auflage. VIII, 131 S. m. 76 Abb. i. T. 1948. Gr. 8°. DM 14.40  
Vergriffen, neue Auflage in Vorbereitung

**Zeitschrift für Naturforschung:** Dieser erste Teil enthält die theoretischen physikalischen Grundlagen, die zum Verständnis der Oxydkathode und ihres Emissionsmechanismus erforderlich sind.

In klarer Darstellung und geschickter Auswahl wird alles berücksichtigt, was zum Verständnis der angeschnittenen Fragen nötig ist. B. Gysae, Hechingen

### II. Teil: Technik und Physik

Von Dr.-Ing. G. HERRMANN, Berlin, und Dr. phil. S. WAGENER, London

2., neubearbeitete Auflage. VIII, 284 Seiten mit 147 Abb. und 3 Tafeln. 1950. Gr. 8°. DM 27.—, geb. DM 29.—

**Das Elektron in Wissenschaft und Technik:** Das Buch stellt eine hervorragende Zusammenfassung der heutigen Erkenntnisse über die Oxydkathode dar und kann dem Ingenieur und Physiker, der sich mit der Theorie und Anwendung von Oxydkathoden und von Verstärkerröhren beschäftigt, wärmstens empfohlen werden. Ein ausführliches Literaturverzeichnis erleichtert das Einarbeiten auch in ganz spezielle Probleme der Kathode. F. Maisch

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG